FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Reitor: Ronaldo Clélio Campolina Diniz
Vice-Reitora: Rocksane de Carvalho Norton

Pró-Reitoria de Graduação
Pró-Reitora: Antônia Vitória Soares Aranha
Pró-Reitor Adjunto: André Luiz dos Santos Cabral
Coordenador do Centro de Apoio à Educação a Distância: Fernando Fidalgo
Coordenador da Universidade Aberta do Brasil: Wagner José Corradi Barbosa

EDITORA UFMG
Diretor: Wander Melo Miranda
Vice-Diretor: Roberto Alexandre do Carmo Said

Márcia Maria Fusaro Pinto

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Belo Horizonte
Editora UFMG
2011

P659f

Pinto, Márcia Maria Fusaro
Fundamentos de matemática / Márcia Maria Fusaro Pinto. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2011.
141 p. : il. -- (Educação a Distância)

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-7041-887-6

1. Funções (Matemática). 2. Análise matemática. I. Título. II. Série.

CDD: 515.25
CDU: 517.5

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação
Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO EDITORIAL Danivia Wolff
ASSISTÊNCIA EDITORIAL Eliane Sousa e Euclídia Macedo
EDITORAÇÃO DE TEXTOS Maria do Carmo Leite Ribeiro
REVISÃO DE TEXTO E NORMALIZAÇÃO Alexandre Vasconcelos de Melo
REVISÃO DE PROVAS Juliana Santos, Nathalia Campos e Simone Ferreira
PRODUÇÃO GRÁFICA Warren Marilac
PROJETO GRÁFICO E CAPA Eduardo Ferreira
FORMATAÇÃO Sérgio Luz

EDITORA UFMG
Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4650 - Fax: + 55 31 3409-4768
www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria - 6º andar
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4054 - Fax: + 55 31 3409-4060
www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

A Educação a Distância (EAD) é uma modalidade de ensino que busca promover inserção social pela disseminação de meios e processos de democratização do conhecimento. A meta é elevar os índices de escolaridade e oferecer uma educação de qualidade, disponibilizando uma formação inicial e/ou continuada, em particular a professores que não tiveram acesso a esse ensino.

Não se pode ignorar que é fundamental haver, sempre, plena conexão entre educação e aprendizagem. A modalidade a distância é um tipo de aprendizagem que, em especial na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), já está concretizada como um ensino de qualidade. Hoje, a aprendizagem tornou-se, para todos os profissionais dessa universidade envolvidos no programa de Educação a Distância, sinônimo de esforço e dedicação de cada um.

Este livro visa desenvolver no curso a distância os mesmos conhecimentos proporcionados num curso presencial. Os alunos estudarão o material nele contido e muitos outros que lhes serão sugeridos em bibliografia complementar. É importante terem em vista que essas leituras são de extrema importância para, com muita dedicação, avançarem em seus estudos.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas e cada uma delas trata de determinado tema, que é explorado de diferentes formas – textos, apresentações, reflexões e indagações teóricas, experimentações ou orientações para atividades a serem realizadas pelos alunos. Os objetivos propostos nas aulas indicam as competências e habilidades que os alunos, ao final da disciplina, devem ter adquirido.

Os exercícios indicados ao final das aulas possibilitam aos alunos avaliarem sua aprendizagem e seu progresso em cada passo do curso. Espera-se, assim, que eles se tornem autônomos, responsáveis, críticos e decisivos, capazes, sobretudo, de desenvolver a própria capacidade intelectual. Os alunos não podem se esquecer de que toda a equipe de professores e tutores responsáveis pelo curso estará, a distância ou presente nos polos, pronta a ajudá-los. Além disso, o estudo em grupo, a discussão e a troca de conhecimentos com os colegas serão, nessa modalidade de ensino, de grande importância ao longo do curso.

Agradeço aos autores e à equipe de produção pela competência e pelo empenho e tempo dedicados à preparação deste e dos demais livros dos cursos de EAD. Espero que cada um deles possa ser valioso para os alunos, pois tenho certeza de que vão contribuir muito para o sucesso profissional de todos eles, em seus respectivos cursos, e na educação em todo o país.

Ione Maria Ferreira de Oliveira
Coordenadora do Sistema Universidade Aberta do Brasil
(UAB/UFMG - jan. 2006 a abr. de 2010 / CAED - set. 2009 a abr. 2010)

Sumário

Aula 5 | Funções Inversas

Aula 6 | Funções Exponenciais

Aula 7 | Funções Logarítmica

Aula 8 | Funções Trigonométricas

Apêndices

Apresentação

Este livro, *Fundamentos de Matemática*, é um estudo das funções reais de variáveis reais relacionando-as a fenômenos que elas modelam. Restringimo-nos aqui às funções chamadas *elementares*, dentre as quais muitas já nos foram apresentadas mesmo antes de entrarmos na universidade.

A intenção é a de retomar os conceitos, definições e propriedades, buscando aprofundar nossas primeiras ideias e, em alguns casos, até mesmo abordá-los de modo alternativo, para ampliar nosso conhecimento sobre o tema. Já no início do texto estudamos as noções de *Variação* e *Taxa Média de Variação de Funções*, compondo um contexto introdutório à disciplina Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), na modalidade a distância. O material aqui apresentado contempla tópicos que acredito serem essenciais para tal disciplina e para um curso de formação de professores de Matemática, que ao mesmo tempo contribui para a atuação profissional futura de um professor trazendo ideias que podem ser exploradas em sala de aula no Ensino Médio e Fundamental.

O texto apresentado neste livro foi construído a partir de minha experiência como professora em cursos presenciais e a distância, e a partir da pesquisa no campo da Educação Matemática. Em especial, já atuei como professora na Educação a Distância e participei de oficinas de produção de material escrito e de debates com outros profissionais da área. Também, retomo aqui a experiência anterior de minha parceria com duas outras professoras e autoras no Curso de Química a Distância, buscando melhorá-la. Deixo registrado meu agradecimento especial a essas colegas, coautoras do texto *Cálculo I* do curso de Licenciatura em Química, pela intensa discussão em que nos envolvemos e da qual resulta as linhas gerais para a construção deste texto.

Mantive a opção construída em nossos encontros de não nos restringirmos à linguagem matemática formal, sem contudo deixar de estarmos atentos ao rigor nas definições matemáticas e na construção dos argumentos ao justificar proposições e teoremas. Por esse motivo, abrimos mão do poder de síntese da linguagem matemática, e todos os textos que produzimos ficam longos. Mesmo assim, optamos por esse estilo porque acreditamos que a introdução precoce de uma linguagem puramente técnica pode resultar numa ênfase em manipulação simbólica, em detrimento das discussões conceituais que achamos importantes e que queremos proporcionar aos alunos.

Seguindo a organização dos textos anteriores, procurei também desenvolver as aulas a partir de exemplos, seguidos da sistematização dos resultados, num movimento de teorização a partir de experiências que esperamos ter proporcionado aos alunos. Busquei, sempre que possível, representar as noções por meios visuais, propondo ao leitor explorar gráficos e figuras, para diversificar as representações dos conceitos. Apresentei também exemplos de situações do nosso dia a dia e de outras ciências, modelando-os matematicamente como uma dentre as possíveis perspectivas para estudá-los. Partindo desses exemplos e de diferentes representações, busquei estabelecer relações e, assim, construir os conceitos matemáticos, enfatizando no texto o estudo destes últimos.

Em síntese, como nos outros livros que escrevemos especialmente para a Educação a Distância, elaborei um texto buscando uma forma mais ampla de abordar os conceitos matemáticos e ainda um diálogo com os leitores, que não terão um professor ao seu lado para "explicar a matéria". A expectativa é a de que, estudando exemplos e conhecendo as diversas representações de um mesmo conceito, o aluno compreenda melhor do que se trata o conteúdo e familiarize-se com ele. Os momentos de síntese teórica buscam estabelecer relações e generalizar situações, contribuindo para que o entendimento do aluno não fique restrito a experiências constituídas por inúmeros exemplos particulares e a técnicas algébricas que ele não consegue relacionar. Esse movimento, a partir de experiências e de modelagem de fenômenos em direção a uma maior teorização, é o fio condutor também da estrutura deste livro.

O texto se organiza em oito aulas, correspondentes às oito semanas de aula da disciplina. Ele está complementado por um Apêndice, em que particularmente discuto algumas questões sobre a Trigonometria. Em nossa experiência como professores na universidade, este tema tem se mostrado difícil para os alunos. A aula inicial discute o conceito de *Funções* e o seu uso na leitura matemática de fenômenos da natureza ou do cotidiano. Introduzo aí a noção de *Variação* de uma função, buscando realçar as informações adicionais que obtemos a partir dela. O conceito de *Taxa de Variação Média* é introduzido na Aula 2. Ele é utilizado para construir modelos matemáticos para estudar alguns fenômenos específicos, definindo uma primeira categoria de funções: a *Função Linear*. Esta mesma noção de *Taxa Média de Variação* é revisitada na Aula 3, para estudar outras relações de dependência entre variáveis, que definem funções.

A Aula 4 retoma operações algébricas e procedimentos para produzir novas funções a partir das já definidas. As noções ali apresentadas são importantes principalmente para o esboço de gráficos de um número maior de funções, a partir de gráficos já conhecidos. *Funções Inversas* é o tópico apresentado na Aula 5. Buscamos definir tal conceito de diversos modos. A intenção é a de enriquecer as representações disponíveis aos alunos e contribuir para melhor compreensão do conceito. A Aula 6 utiliza e define a *Função Logarítmica* como inversa da *Função Exponencial*, apresentada na Aula 3. Finalizamos o texto com a introdução às *Funções Trigonométricas* e suas Inversas. Iniciamos com a definição de medida de ângulo em *radiano* e com a extensão da *trigonometria no triângulo* para o *círculo trigonométrico*.

Espero que deste livro surjam ideias e propostas que possam ser levadas por você, leitor, para a sala de aula no Ensino Médio e Fundamental, consolidando ao mesmo tempo o seu próprio conhecimento sobre o tema.

A Autora

AULA 1

Funções Reais

Objetivos:

- Trabalhar o conceito de *Função* e as diversas formas de representá-la matematicamente, relacionando-as.
- Relacionar o conceito de *Função* a outras áreas do conhecimento.
- Definir a noção de *Variação*.

1. INTRODUÇÃO

Esta aula é dedicada a conceitos básicos de *Funções*. Como *funções* serão utilizadas durante todo o curso, noções relacionadas serão apresentadas em várias outras aulas.

A noção de *Função* em Matemática não é uma novidade deste texto. Em um livro do Ensino Básico, você provavelmente encontrará uma definição semelhante à que transcrevo a seguir:

Definição:

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma relação que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y de B. [1]

[1] MACHADO. *Matemática. Temas e metas*. 1– conjuntos numéricos e funções, p. 69.

Interessante é que o autor do livro consultado, após dedicar-se a preparar os conceitos necessários para formular a definição acima, apresenta também uma alternativa:

Noção Intuitiva

Quando duas grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que para cada valor de x fica determinado um único valor de y, dizemos que y é uma função de x.

Deste modo, o autor deixa explícita a tensão entre o rigor e a intuição com que temos que conviver – ambos são necessários para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Embora reconhecendo este fato, fazemos duas ressalvas. Primeiro, a definição de *Função* apresentada acima é bastante recente, se considerarmos o desenvolvimento do conhecimento matemático ou até mesmo do Cálculo. O instrumento que ela representa não é potencializado de fato, nem no desenvolvimento do conteúdo de *funções* na escola básica, nem no estudo do Cálculo. Normalmente, quase imediatamente após sua apresentação, a definição é abandonada e passamos a representar *funções* por *expressões algébricas* ou por seu *gráfico*. Segundo, a noção intuitiva como foi apresentada parece-nos apenas reescrever a ideia da primeira definição, não realçando noções que predominam e referenciam demonstrações e discussões quando trabalhamos o Cálculo: as noções de *variação* e de *dependência entre variações*.

Por este motivo, optamos iniciar o estudo de *Funções* destacando a possibilidade de relacionar elementos ou grandezas segundo alguma relação de dependência, em suas várias representações.

A noção de *variação* complementa o estudo e indica a direção das próximas aulas.

Iniciamos a discussão com exemplos.

2. EXEMPLOS

2.1 Exemplo: altura de André em função da idade

A Tabela 1, a seguir, contém o registro da altura de um menino – André – dada em centímetros, em cada mês após seu nascimento, num período de 12 meses. Esses dados foram obtidos em arquivos de seu pediatra.

Tabela 1
Altura (em cm) de André em função de sua idade (em meses)

Idade (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
Altura (cm)	46,0	46,0	49,5	51,5	54,5	57,0	60,0	62,7	65,5	67,5	73,0

Como interpretar as informações contidas no registro do pediatra? O que você pode concluir sobre o desenvolvimento da criança nesse período? Se você fosse a mãe ou o pai de André, que leitura faria das informações contidas nessa tabela?

Consultando a Tabela 1, certamente você irá concordar que André cresceu bastante, nesse primeiro ano de vida. Se quisermos saber se o seu desenvolvimento foi satisfatório naquele ano, poderíamos compará-lo com o de outras crianças, em registros semelhantes. Pediatras disponibilizam e analisam estes dados.

Mas o que essa tabela tem a ver com *função*?

Veja que aqui relacionamos duas grandezas: a altura de André, medida em centímetros, e o tempo, medido em meses. A cada mês do ano correspondeu um valor da altura de André. Observando a tabela, podemos dizer que a altura de André depende do tempo.

Em Matemática, as *funções* representam relações de dependência como estas. No caso desse exemplo, dizemos que a altura de André é uma *função* do tempo.

2.2 Exemplo: preço da corrida de táxi

Quando utilizamos um táxi como meio de transporte, a cobrança desse serviço é feita por meio de duas taxas: a bandeirada e o quilômetro rodado. A bandeirada é um valor fixo que é cobrado assim que entramos no táxi, e o quilômetro rodado é um valor que é adicionado ao preço a cada vez que se completa o percurso de um quilômetro. Em Belo Horizonte, por exemplo, o valor da bandeirada é R$3,30, e o quilômetro rodado vale R$2,04.[2]

[2] BELO HORIZONTE, 2009.

Isso significa que, se percorremos um trajeto de 5 *km*, o preço a ser pago é igual a

$$P = 3,30 + 5 \times 2,04 = 13,50$$

Veja que P, em reais, depende do número d de quilômetros rodados. Para cada quilômetro rodado temos um (único) valor do preço a ser pago, de acordo com a tabela da "bandeira 1" válida em Belo Horizonte, em dezembro de 2009. No caso deste exemplo, dizemos que o preço da corrida de táxi é uma *função* do número d de quilômetros rodados.

2.3 Exemplo: queda livre

O movimento vertical de um corpo em queda livre, sujeito apenas à força da gravidade, desprezada a resistência do ar, é escrito em Matemática pela fórmula:

$s = \frac{1}{2} g t^2$, na qual g representa a aceleração da gravidade $(g \oplus 9,81 m/s^2)$, t representa o tempo (em segundos) percorrido desde o instante em que o objeto começou a cair, e o espaço percorrido s é medido em metros. Veja que o espaço percorrido s depende do tempo t.

De acordo com esta fórmula, o espaço percorrido pelo objeto no terceiro segundo é $s(3)=\frac{1}{2}g.3^2=4,5g$.

A multiplicação da unidade de medida de g (m/s^2) pela unidade de medida de t^2 (s^2) resulta na medida de s (m), da mesma forma que a multiplicação de $\frac{1}{2}g$ por t^2 resulta em s. No caso deste exemplo, dizemos que o espaço percorrido s é uma *função* do tempo t.

3. FUNÇÕES

Os três exemplos acima têm em comum o fato de representarem uma *relação de dependência entre grandezas* (medida da altura depende do tempo; preço a ser pago depende do quilômetro rodado e a distância percorrida depende do tempo). Além disso:

a cada mês registrado na tabela corresponde a uma única medida de altura; a cada quilômetro rodado corresponde a um único preço a ser pago (na "bandeira 1"); a cada instante corresponde a uma única medida do espaço percorrido.

Essas são as características que definem uma *Função* em termos matemáticos.

Sintetizamos, a seguir, a definição de *Função* com que vamos trabalhar:

3.1 Definição

Uma *função* é uma relação de dependência entre duas grandezas de tal forma que, para *cada* valor x de uma, está associado *um único* valor y da outra.

3.2 Exemplos

1- No exemplo 2.1, as grandezas envolvidas são o tempo e a altura de André. A cada valor da idade t, em *meses*, está associado um único valor h (em *cm*) da altura de André.

2- No exemplo 2.2, as duas grandezas são o quilômetro rodado d e o preço P. A cada valor do quilômetro rodado d está associado um único preço P a ser pago.

3- No caso do exemplo 2.3, as duas grandezas são o tempo t e a distância percorrida s. A cada valor do tempo t corresponde a uma medida da distância percorrida s.

A seguir, definiremos alguns conceitos relacionados ao conceito de *função*.

3.3 Definição

Considere uma *função*, relacionando duas grandezas.

a) O conjunto de valores que a primeira grandeza pode assumir é denominado *domínio* da função.

b) O conjunto dos valores assumidos pela segunda grandeza é denominado *imagem* da função.

c) Um elemento genérico do domínio é denominado *variável independente*, enquanto um elemento genérico da imagem é denominado *variável dependente*.

3.4 Exemplos

1- No exemplo 2.1, o domínio D é o conjunto de valores assumidos por t, ou seja,

$$D = \{0,0; 1,0; 2,0; 2,5; 3,5; 4,5; 6,0; 7,0; 8,0; 9,0; 12,0\}$$

A imagem I é o conjunto de valores assumidos por h, ou seja,

$$I = \{46,0; 46,0; 49,5; 51,5; 54,5; 57,0; 60,0; 62,7; 65,5; 67,5; 73,0\}.$$

A variável independente é t e a variável dependente é h.

2- No exemplo 3.3, o domínio e a imagem correspondem ao conjunto dos reais positivos se supusermos que o corpo cai (idealmente) de uma altura infinita.

3.5 Notações e linguagem

É comum (e útil) darmos nomes às *funções*. Esses nomes, normalmente, são letras do nosso alfabeto. E como a palavra função começa com a letra f, esse é o nome mais usado.

Se f é uma *função* que associa valores x de uma grandeza a valores y de outra grandeza, dizemos que $y = f(x)$. (Lemos assim: y é igual a f de x).

Muitas vezes, damos às variáveis nomes que nos fazem lembrar as grandezas que elas representam.

3.6 Exemplos

1) No exemplo 2.1, estamos representando a altura por h e o tempo por t . Podemos dizer que $h = f(t)$, ou seja, a altura h representada pela Tabela 1 é uma função do tempo t (se escolhermos o nome f para a função).

2) No exemplo 2.2, representamos o preço ou tarifa por P, o quilômetro rodado por d e podemos dizer que $P = f(d)$, onde f é o nome que escolhemos para representar a relação entre P e d.

3) No exemplo 2.3 representamos o espaço percorrido em queda livre por s, o tempo por t e dizemos que $s = h(t)$. Neste caso, h é representada pela fórmula $s = h(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

4. FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

Os três exemplos discutidos nos trazem maneiras diferentes de representar uma *função*: a representação por uma tabela, por palavras, ou por uma fórmula. Existe ainda uma outra maneira de representar uma *função* que queremos discutir: por gráficos.

É importante que você saiba reconhecer uma *função,* independentemente da forma como ela foi ou está representada, e que você saiba relacionar os diferentes modos de representá-la, tornando-se capaz de olhar para uma mesma *função* sob mais de uma perspectiva.

No que segue, vamos trabalhar essas diversas formas de representar uma *função* em maior detalhe, buscando relacioná-las.

4.1 Tabelas, fórmulas e palavras

A Tabela 1 é uma forma de representar a função $h = f(t)$ (altura em função do tempo) por meio de uma *tabela*.

A expressão $s = \frac{1}{2}gt^2$ é uma maneira de representar a função $s = h(t)$ (espaço percorrido em queda livre em função do tempo) por meio de uma *fórmula*.

Já o exemplo 2.2 nos apresenta a função tarifa ou preço a ser pago por uma corrida de táxi por meio de palavras. Podemos obter uma fórmula que represente a função preço P a partir de um cálculo semelhante ao que fizemos para encontrar o preço a ser pago se percorrêssemos 5 quilômetros. Retome o exemplo 2.2 e confirme que o preço pago P por uma distância percorrida d pode ser expresso por meio da seguinte fórmula:

$$P = f(d) = 3,30 + 2,04d$$

Vale esclarecer algumas coisas referentes ao preço da corrida de táxi como uma função de d.

4.1.1 Alguns esclarecimentos sobre a função preço da corrida de táxi

Em $P = f(d) = 3,30 + 2,04d$, como d é uma distância percorrida, podemos pensar em d como um número real positivo. Assim, o *domínio* de P é o intervalo $[0, +\infty)$.

E qual será a imagem de P?

Da nossa experiência, sabemos que se o táxi percorrer uma distância que não seja um número inteiro, o cálculo do preço não será realizado pela fórmula acima. Ou seja, se o táxi percorrer 6,5 *km*, o preço a ser pago não será $f(6,5) = 3,30 + 2,04.6,5 = 16,56$.

Para calcular o preço, é como se o taxímetro aplicasse a fórmula acima ao maior inteiro menor que a distância percorrida. No caso do percurso de 6,5 *km*, o preço a ser pago será $P = f(6) = 3,30 + 2,04.6 = 15,54$, já que 6 é o maior inteiro menor que 6,5. Em outras palavras, o valor a ser pago é alterado apenas nos momentos em que um percurso de um quilômetro é concluído.

Há uma expressão matemática para representar associações como esta, que é $g(x) = [|x|]$. Essa função tem até um nome especial – função maior inteiro que não supera x. Assim, a expressão da função preço da corrida de táxi seria, de fato, $P = f(d) = 3,30 + 2,04[|d|]$.

E quem seria a *imagem* da função? Ela corresponderia aos valores $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ e assim sucessivamente. Portanto, a imagem da função P é $\{f(0), f(1), f(2), f(3)...\}$.

4.2 Identificando funções, em palavras, numa releitura de relatos

Ana Maria havia saído de casa há 10 minutos, em direção ao trabalho, quando percebeu que um pneu de seu carro estava furado. Ela parou o carro e demorou cerca de 1 hora para trocar o pneu. Ao final, ela estava completamente suja. Como já estava atrasada, telefonou para a empresa onde trabalha, relatou o ocorrido e avisou que voltaria em casa para tomar um banho, o que provocaria um atraso maior. 30 minutos depois, ela estava, finalmente, a caminho do trabalho. Assim, um trajeto que, normalmente, demoraria 20 minutos, demorou muito mais...

Apesar de haver números no texto, não foram usadas tabelas ou fórmulas para representar uma função. Há variáveis relacionadas por meio de uma função nesse relato?

Vamos reinterpretar o texto relacionando as grandezas tempo (t, medido em minutos) e distância (d, medida em quilômetros) de Ana Maria a sua casa:

- Ao tempo $t = 0$, temos também $d = 0$, pois Ana Maria estava em casa.
- Para t variando entre 0 e d_0, o valor de d vai aumentando (ela está se afastando de casa) até um certo valor d_0, que é

a distância de casa ao local em que ela se encontra quando percebe que o pneu está furado.

- Para t variando entre 10 e 70, temos $d = d_0$ (constante), pois ela ficou parada por 1 hora para trocar o pneu.
- Para t variando entre 70 e 80, o valor de d vai diminuindo até 0, pois ela está se aproximando de casa até chegar lá. Estamos supondo que, para voltar para casa, ela gastaria o mesmo tempo que gastou para ir de casa até o ponto em que o pneu furou.
- Para t variando entre 80 e 110, temos $d = 0$, pois ela ficou em casa por 30 minutos para tomar um banho e se arrumar novamente.
- Finalmente, para t variando entre 110 e 130, o valor de d vai aumentando até que ela chega ao trabalho, já que Ana Maria, normalmente, gasta 20 minutos para chegar lá.

Com essa interpretação, percebemos que, para cada valor de t, existe um único valor de d, apesar de não sabermos exatamente quanto ele vale em cada momento. Temos aí uma função representada por palavras, ou, uma leitura de um relato com um olhar matemático.

4.3 Gráficos

Há diversas formas de representar informações numéricas por meio de *gráficos*. A que queremos abordar aqui, por sua importância no caso do Cálculo, é a que utiliza o plano cartesiano.[3] Nesta, o *gráfico* de uma função é um subconjunto do plano cartesiano.

[3] Se você tiver dúvidas sobre plano cartesiano, consulte algum livro de Matemática do Ensino Médio para fazer uma revisão.

4.3.1 Definição

Sejam $y = f(x)$ uma função e D seu domínio. O *gráfico* de f é definido por

Graf (f) = $\{(x, y) \in IR^2 \,/\, x \in D \text{ e } y = f(x)\}$.

4.3.2 Exemplos

Na Figura 1, representamos os dados da Tabela 1 por meio de um *gráfico*.

Para esboçar o *gráfico* da função preço da corrida de táxi, do exemplo 2.2, devemos nos lembrar que:

$0 \leq d < 1 \Rightarrow P(d) = P(0) = 3{,}30$

$1 \leq d < 2 \Rightarrow P(d) = P(1) = 3{,}30 + 2{,}04.1 = 5{,}34$

$2 \leq d < 3 \Rightarrow P(d) = P(2) = 3{,}30 + 2{,}04.2 = 7{,}38,$ e assim por diante.

O *gráfico* desta função corresponde a vários segmentos de reta horizontais, correspondendo aos espaços percorridos onde o taxímetro não altera o preço da corrida.

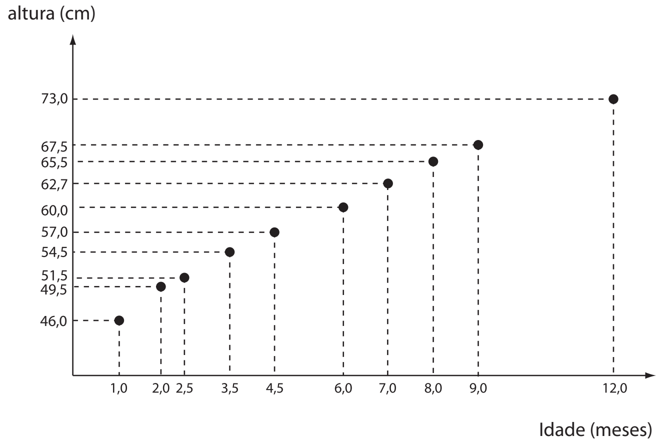


Figura 1 - A função altura de André

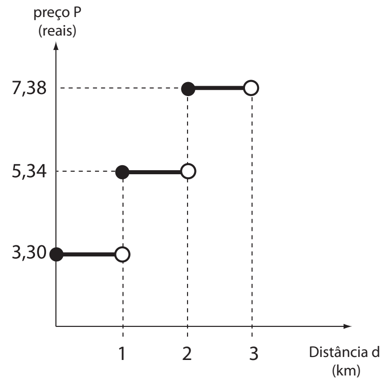


Figura 2 - A função preço da corrida de táxi

Por fim, o *gráfico* da função $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

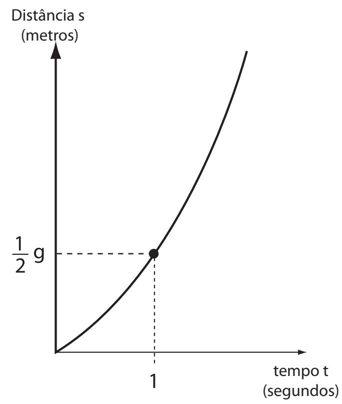


Figura 3 - Função queda livre de um corpo

5. VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Há situações que demandam informações mais abrangentes sobre um fenômeno e não apenas um valor pontual, obtido a partir do cálculo do valor de uma função num ponto de seu domínio. Esse é o caso, por exemplo, quando queremos medir o crescimento (ou decrescimento) de alguma grandeza em um determinado intervalo de tempo. Aqui vamos estudar a ideia de *variação*, que nos possibilita trabalhar a questão.

5.1 Exemplo: variação da altura de André

Quando André tinha dois meses, sua mãe voltou da consulta ao pediatra e comunicou: "André cresceu 3 centímetros e meio neste mês!"

Com essa informação, não sabemos qual a altura de André, nem nesse mês, nem no mês anterior. Sabemos apenas que houve um acréscimo na medida de sua altura.

Veja que tal informação é diferente das discutidas em outros exemplos de funções.

De fato, retome a Tabela 1, que registra a altura de André, em centímetros, nos primeiros 12 meses de seu nascimento, em função do tempo. Como saber quanto André cresceu em períodos específicos desse primeiro ano? Um cálculo como esse, do crescimento ou acréscimo na altura de André em um mês, é melhor compreendido por meio do conceito de *variação* de uma função.

Consultando a Tabela 1, veja que de 2,0 a 2,5 meses de idade, André cresceu

$$51,5cm - 49,5cm = 2,0cm$$

Entre 2,5 a 4,5 meses, André cresceu

$$57,0cm - 51,5cm = 5,5cm \quad .$$

Essa diferença entre os valores da altura é chamada *variação* da altura. Utilizando a notação $y = f(t)$ para representar a função que relaciona y e t, podemos reescrever os cálculos acima como a seguir:

$f(2,5) - f(2,0) = 51,5 - 49,5 = 2,0$ (para a variação de y correspondente a $[2,0;2,5]$)

$f(4,5) - f(2,5) = 57,0 - 51,5 = 5,5$ (para a variação de y correspondente a $[2,5;4,5]$)

A definição a seguir é uma síntese da discussão acima.

5.2 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D. Se $a,\ b \in D$, a *variação* de y correspondente à variação de x no intervalo $[a,b]$ é definida por:

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

5.3 Notação e linguagem

Veja que denotamos a *variação* de y por Δy (lemos "delta y").

A *unidade de medida* de Δy é a mesma *unidade de medida* de y.

Retomando a Tabela 1, confirme que André cresceu $\Delta y = 2,0cm$ no primeiro intervalo de tempo considerado e que, no intervalo posterior, ele cresceu $\Delta y = 5,5cm$.

Tais informações, no entanto, não nos dizem em qual dos dois intervalos de tempo André cresceu mais rapidamente. A "rapidez de crescimento" em um período é melhor compreendida e calculada por meio de outro conceito: o de *taxa média de variação* de uma função. Esse será o tema de nossa próxima aula.

EXERCÍCIOS

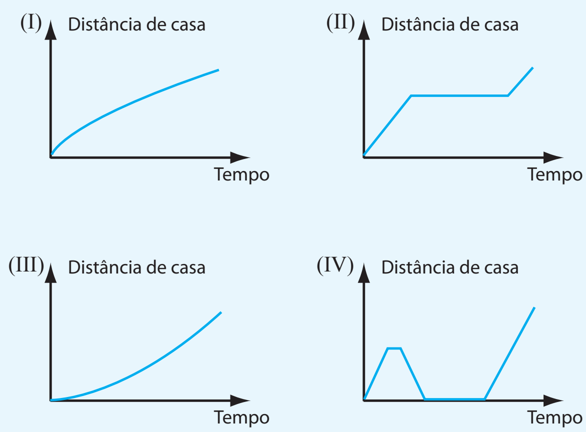
1 - Você conhece alguma situação, algum fenômeno, que pode ser interpretado como uma função entre duas grandezas? Confira se seu exemplo satisfaz as mesmas características destacadas nos exemplos anteriores. Quais são os domínios e imagens das funções que você encontrou? Escolha nomes para essas funções e procure escrevê-las com a notação de funções que apresentamos nesta aula.

2 - Qual dos gráficos combina melhor com as três estórias seguintes?[4] Escreva uma estória para o gráfico restante.

(a) Eu tinha acabado de sair de casa quando percebi que tinha esquecido meus livros, então voltei para trás para pegá-los.

(b) As coisas correram muito bem até eu ter um pneu furado.

(c) Parti devagar, mas acelerei quando percebi que ia chegar atrasado.



3 - A temperatura subiu durante toda a manhã, e então, subitamente, ficou muito mais frio perto do meio-dia, quando sobreveio uma tempestade. Depois da tempestade, a temperatura subiu antes de cair o pôr do sol. Esboce um possível gráfico da temperatura desse dia como função do tempo.

4 - Um voo do aeroporto de Confins, em Belo Horizonte, até o aeroporto do Galeão, no Rio de Janeiro, tem que dar várias voltas sobre o Rio de Janeiro antes de ter permissão para aterrissar. Faça um gráfico da distância do avião a partir de Belo Horizonte, contra o tempo, do momento da partida até a aterrissagem.

5 - Veja as funções abaixo, dadas em representações diversas. Em cada caso, ache $f(5)$.

(a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,3	2,8	3,22	3,7	4,1	4,9	5,6	6,2

Tabela 2: função $y = f(x)$.

[4] Adaptado de TERWAL. Real math in Cooperative Groups in Secondary Education., p. 234.

(b)

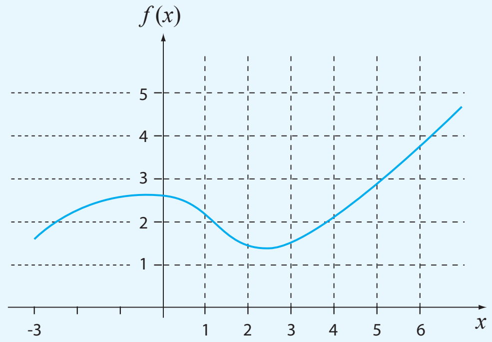


Figura 5

(c)

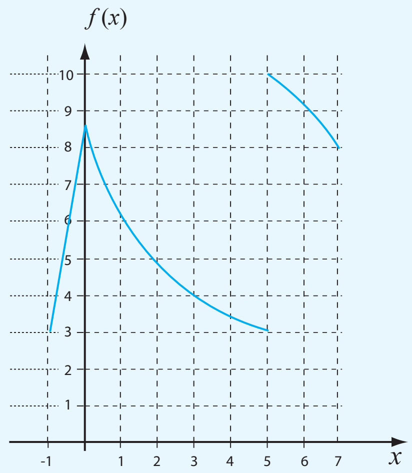


Figura 6

(d) $f(x) = 10x - 4$.

(e) $f(x) = 4x - x^2$.

6 - Considere a função $y = f(x) = x^2 + 4$.

(a) Qual o valor de y quando x é zero?

(b) Quanto vale $f(2)$?

(c) Para que valores de x teremos $y = 10$?

(d) Existem valores de x que dão a y o valor 1?

(e) Ache a variação de f entre $x = 1$ e $x = 3$.

7 - Seja $y = f(x) = 2x - 3$.

(a) Calcule $f(-1)$.

(b) Ache o valor de y quando x é 5, e o valor de x quando y é 4.

(c) Ache a variação de f entre $x = 1$ e $x = 3$.

8 - O valor de um computador, $V = f(a)$ em milhares de reais, é uma função da idade do computador, em anos, desde que foi comprado.

(a) Interprete a afirmação $f(2) = 1$.

(b) Esboce um possível gráfico de V contra a.

(c) Explique o significado dos valores de intercepto vertical em termos de valor do computador.

REFERÊNCIAS

BELO HORIZONTE. Disponível em: <http://megaminas.globo.com/noticia.php?noticia=1451>. Acesso em: 14 jan. 2009.

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.

MACHADO, A. S. *Matemática: temas e metas*. 1– conjuntos numéricos e funções. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1996.

PINTO, M.; ARAUJO, J. FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

RESNICK, R., HALLIDAY, D. *Física*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1984. 309 p. 2. vol.

TERWAL, Jan. Real math in Cooperative Groups in Secondary Education. In: DAVIDSON Neal (Ed.). *Cooperative Learning in Mathematics*. Reaging: Addison Wesley, 1990.

AULA 2

Taxa Média de Variação e Funções Lineares

Objetivos

- Definir a noção de *Taxa Média de Variação*.
- Utilizar o conceito de *Taxa Média de Variação* para definir *Funções Lineares*.
- Estudar esta classe de funções.

1. INTRODUÇÃO

Na aula anterior, discutimos aspectos gerais relativos a funções. Obtivemos informações pontuais sobre os fenômenos que elas representam, calculando valores em pontos específicos de seu domínio. Definimos o conceito de variação, que nos fornece informações sobre a função em intervalos de seu domínio.

Nesta aula vamos discutir o conceito de *Taxa Média de Variação*[1] de uma função. Este nos possibilita comparar a variação de uma função em intervalos distintos, por meio do cálculo da "rapidez" de variação em intervalos.

[1] Neste texto, usaremos, sem distinção, ambas as expressões *Taxa de Variação* e *Taxa Média de Variação*.

A partir da noção de *Taxa Média de Variação* vamos caracterizar um tipo especial de funções, que são as *funções lineares*. Vamos estudá--las, aprendendo a identificá-las em diversas representações.

2. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Ao final de nossa primeira aula, deixamos em aberto a possibilidade de comparar a variação de uma função em intervalos distintos. Vamos definir um conceito que possibilita avaliações como esta. Iniciamos retomando o exemplo 2.1 da aula anterior e buscando avaliar em que intervalos de tempo André cresceu mais rapidamente.

2.1 Exemplo 2.1: velocidade de crescimento de André

Para sabermos em qual período de tempo André cresceu mais rapidamente, podemos comparar a variação de sua altura com a variação correspondente de sua idade, por meio de uma razão. Por exemplo, no intervalo $[2,0;2,5]$,

$$\frac{\textit{variação da altura}}{\textit{variação da idade}}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(2,5)\ -\ f(2,0)}{2,5-2,0}=\frac{51,5\ -\ 49,5}{2,5-2,0}=\frac{2,0}{0,5}=4,0\,cm\,/\,mês$$

E em $[2,5;4,5]$,

$$\frac{\textit{variação da altura}}{\textit{variação da idade}}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(4,5)\ -\ f(2,5)}{4,5-2,5}=\frac{57,0\ -\ 51,5}{4,5-2,5}=\frac{5,5}{2,0}=2,75\,cm\,/\,mês$$

Esses cálculos expressam a “velocidade de crescimento” de André nos dois intervalos considerados: apesar de ele ter crescido apenas 2,0*cm,* no primeiro intervalo, sua “velocidade de crescimento” aí foi de 4,0*cm/mês*, que é maior do que a “velocidade” em $[2,5;4,5]$.

Esta razão $\dfrac{\textit{variação da altura}}{\textit{variação da idade}}$ tem o nome especial de *taxa média de variação* da altura em relação ao tempo. Veja que a *unidade de medida* da taxa média de variação é a razão entre a unidade de medida da altura e a unidade de medida da idade.

A razão entre a variação de uma função e o comprimento do intervalo de sua definição é denominada *taxa média de variação*.

Utilizando a linguagem matemática:

2.2 Definição

Seja $y = f\,(x)$ uma função com domínio D. Se a, $b \in D$, a taxa média de variação de y correspondente à variação de x no intervalo $[a,b]$ é definida por:

$$\frac{\textit{variação de } y}{\textit{variação de } x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

A *unidade de medida* de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é $\dfrac{\textit{unidade de medida de } y}{\textit{unidade de medida de } x}$.

2.3 Exemplo: a velocidade de um corpo em movimento linear

Um objeto se move ao longo de uma linha reta de modo que sua posição em relação ao ponto de partida, após t minutos, é $p=s(t)=t^2-2t+6$.

a) Após 3 minutos, o objeto estará em uma posição igual a

$s(3) = 3^2 - 2.3 + 6 = 9m$.

O valor $s(3)$ é a posição em que o objeto se encontra, com relação ao ponto de partida, após 3*min*.

b) A variação da posição do objeto quando *t* varia de 3 a 5*min* é igual a

$\Delta p = s(5) - s(3) = 21 - 9 = 12m$.

A quantidade Δp é a distância percorrida pelo objeto no intervalo de tempo $[3,5]$.

c) A taxa média de variação do objeto no intervalo $[3,5]$ é igual a

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = \frac{21 - 9}{5 - 3} = \frac{12}{2} = 6{,}0\, m/\min .$$

A razão $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ é a velocidade média do objeto quando o tempo varia de 3 a 5*min*, ou seja, nesse intervalo, o objeto tem uma *velocidade média* igual a 6,0 *m/min*.

2.4 Relações entre Taxa Média de Variação e Crescimento ou Decrescimento

Retome o exemplo 2.1 da Aula 1 e confirme que André, em seu primeiro ano de vida, cresceu todo o tempo. A *taxa média de variação* de sua altura foi sempre positiva (exceto no primeiro mês, em que no registro esta permaneceu constante e, portanto, a taxa média foi nula). Essa observação não é coincidência: há uma relação entre o sinal da *taxa média de variação* de uma função e seu *crescimento* ou *decrescimento*.

Antes de apresentarmos tal relação, vamos precisar o que vem a ser função *crescente* e função *decrescente*,[2] definindo-as matematicamente:

2.5 Definição

a) Dizemos que uma função *f* é *crescente* em um intervalo *I* se, e somente se, para quaisquer *a*, *b* nesse intervalo tem-se:

se $a < b$ então $f(a) < f(b)$.

b) Dizemos que uma função *f* é *decrescente* em um intervalo *I* se, e somente se, para quaisquer *a*, *b* nesse intervalo tem-se:

se $a < b$ então $f(a) > f(b)$.

[2] A Definição 2.5 corresponde, em diversos textos de Cálculo, à definição de funções *estritamente* crescente e *estritamente* decrescente. Observe que o enunciado na Definição 2.5 impõe a desigualdade estrita entre os valores da função. Em textos que fazem esta opção, o enunciado da definição de função *crescente* e de função decrescente admite a igualdade entre os valores $f(a)$ e $f(b)$ da função. Ou seja, o sinal entre estes valores na definição seria o de *menor ou igual*.
No entanto, há autores que trabalham com a definição como em Definição 2.5. Por uma questão de simplicidade neste momento, decidimos adotá-la.

Veja a proposição a seguir, relacionando as noções de *Taxa Média de Variação* e *Crescimento* e *Decrescimento* de funções:

2.6 Proposição

Sejam $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a,\ b \in D$.

a) Se f é *crescente* em $[a,b]$, então a *taxa média de variação* de f nesse intervalo é *positiva*.

b) Se f é *decrescente* em $[a,b]$, então a *taxa média de variação* de f nesse intervalo é *negativa*.

c) Se f é *constante* em $[a,b]$, então a *taxa média de variação* de f nesse intervalo é *nula*.

Demonstração

Vamos demonstrar aqui a primeira afirmativa. As demais são demonstradas de modo semelhante.

Por hipótese, a função f é crescente no intervalo $[a,b]$. Queremos mostrar que a taxa média de variação de f em $[a,b]$ é positiva.

Escrevendo a taxa média de variação de f em $[a,b]$, tem-se:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Veja que $a < b$, pois a e b são extremos do intervalo $[a,b]$. Então $\Delta x = b - a > 0$.

Ainda, uma vez que f é crescente, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Então $\Delta y = f(b) - f(a) > 0$.

Portanto, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, como queríamos demonstrar.

A Proposição 2.6 discute funções que têm taxa média de variação positiva, negativa ou nula.

No que segue, vamos estudar funções que têm *taxa média de variação* constante. Estas constituem um tipo importante de funções – as *funções lineares*.

3. FUNÇÕES LINEARES

3.1: Exemplo: taxa média de variação da função preço da corrida de táxi

Nesse exemplo, retomamos a função preço da corrida de táxi definida apenas nos números inteiros positivos e escrita como

$P = f\left(d\right) = 3,30 + 2,04d$.

Sua *taxa média de variação*, por exemplo, no intervalo $\left[3,7\right]$, é dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta d} = \frac{f(7) - f(3)}{7-3} = \frac{17,58 - 9,42}{4} = 2,04 .$$

Veja que esse valor da *taxa média de variação* é igual ao preço do quilômetro rodado! Seria uma coincidência?

Para responder a uma questão como essa, calculamos a *taxa média de variação* em um intervalo $\left[a,b\right]$ qualquer, com $b \neq a$:

$$\frac{\Delta P}{\Delta d} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{(3,30 + 2,04b) - (3,30 + 2,04a)}{b-a} = \frac{2,04(b-a)}{b-a} = 2,04$$

Confirmamos então que a *taxa média de variação* é constante e igual a 2,04, em qualquer intervalo do domínio da função *f*.

Na verdade, se a partir da função preço da corrida de táxi considerarmos uma expressão como $P = f\left(d\right) = 3,30 + 2,04d$, definida para todos os números reais, a relação descrita acima também vai se verificar em qualquer intervalo.

Funções como essa, que têm *taxa média de variação* constante, são chamadas *funções lineares* e são definidas algebricamente como a seguir.

3.2 Definição

Uma *função linear* é uma função que pode ser expressa por

$y = f\left(x\right) = ax + b$

em que *x* é a *variável independente* e *a* e *b* são números reais constantes.

3.3 Notação e linguagem

A constante *a* é denominada *coeficiente angular*, e a constante *b* é denominada *coeficiente linear*.[3]

[3] O motivo dessa nomenclatura será esclarecido mais à frente.

3.4 Exemplo

A função $P = f\left(d\right) = 3{,}30 + 2{,}04d$ é linear, e os valores de a e b são, respectivamente, 2,04 e 3,30.

3.5 Taxa Média de Variação e Funções Lineares

Apresentamos as *funções lineares* como funções que têm *taxa média de variação* constante. Por isso, precisamos mostrar que a *taxa média de variação* de qualquer *função linear* é constante e que as funções que têm *taxa de variação constante* são todas *lineares*. Isto será estabelecido nas proposições a seguir.

3.5.1 Proposição:

Seja $y = f\left(x\right) = ax + b$ uma *função linear*, com coeficientes a e b.

Então, a *taxa média de variação* de $f\left(x\right)$ é constante e igual a a, em qualquer intervalo de *IR*.

Demonstração:

Considere um intervalo qualquer $\left[m, n\right]$.

Devemos mostrar que a taxa média de variação de *f*, nesse intervalo $\left[m, n\right]$, que é genérico, é constante e igual a a.

Calculando essa taxa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(m) - f(n)}{m - n} = \frac{(am + b) - (an + b)}{m - n} = \frac{am + b - an - b}{m - n} = \frac{a(m - n)}{m - n} = a$$

3.5.2 Proposição:

Seja $y = f\left(x\right)$ uma função definida em um intervalo I, com *taxa média de variação constante*. Então *f* é uma *função linear*, ou seja, pode ser escrita como $y = f\left(x\right) = ax + b$.

Demonstração:

Seja $p \in I$. Então existe $y = f(p)$, porque f está definida em I.

Como a taxa de variação de f é constante, podemos escrever que

$\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ é constante, para todo $x \in I$, com $x \neq p$.

Vamos chamar essa constante de a. Assim,

$\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = a$, para todo $x \in I$, com $x \neq p$.

Reescrevendo a expressão,

$f(x) - f(p) = a(x - p)$, ou seja,

$f(x) = ax + (f(p) - ap)$.

Escrevendo que $b = (f(p) - ap)$, veja que expressamos nossa função como $f(x) = ax + b$, para todo $x \in I$, com $x \neq p$.

Observe que essa expressão também vale para $x = p$, pois $ap + b = ap + (f(b) - ap) = f(b)$.

4. O SIGNIFICADO GRÁFICO DE TAXAS DE VARIAÇÃO CONSTANTES

Já temos elementos para estudar os gráficos das funções lineares com maior cuidado e compreender por que eles são retas. Vamos discutir a questão com exemplos.

4.1 Exemplo: a função linear $y = f(x) = 2x + 1$

Seja a função linear $y = f(x) = 2x + 1$. Sabemos que sua taxa média de variação é igual a 2 em qualquer intervalo de seu domínio (que é *IR*).

O significado desse fato, em termos gráficos, é que intervalos de comprimentos iguais, no eixo *Ox*, determinam, na direção *Oy*, variações iguais ao dobro da variação em *Ox*, no gráfico de *f*.[4]

Veja que um movimento desses define uma mesma inclinação na “subida” *y*, em todo o domínio da função. Por isso, seu gráfico é uma reta.

[4] Se não fosse assim e a variação na direção *Oy* fosse maior ou menor que duas unidades, haveria uma contradição com o fato de a taxa média de variação ser constante e igual a 2.

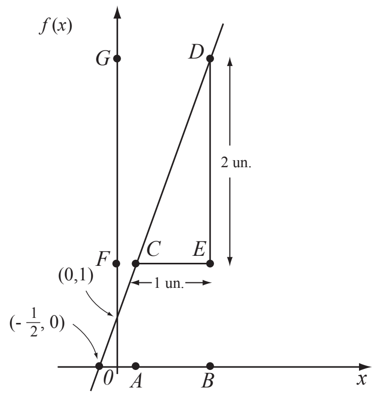


Figura 1- Comparando variações nos eixos *Ox* e *Oy*, relativas à função $f(x)=2x+1$

Explicando de outro modo:

na Figura 1 o intervalo $\overline{CE}$ mede *1 unidade* e é paralelo a *Ox*. O intervalo correspondente a $\overline{CE}$, na direção *Oy*, com relação ao gráfico de *f*, é o intervalo $\overline{ED}$, e ele mede *2 unidades*. Assim, a cada uma unidade que "andamos para a direita" na direção *Ox*, o gráfico de *f* "sobe" *2 unidades* na direção *Oy*.

4.2 Exemplo: o caso geral $y = f\left(x\right) = ax + b$

Para o caso geral $y = f\left(x\right) = ax + b$ a discussão é basicamente a mesma. Cada deslocamento de uma unidade na direção *Ox* determina um deslocamento de *a* unidades na direção *Oy*. O deslocamento será positivo se *a* for positivo (e a função é crescente) e negativo se *a* for negativo (a função é decrescente).

Para explorar o caso geral, retome a Figura 1.

Como o segmento $\overline{CE}$ é paralelo ao eixo *Ox*, o ângulo $D\hat{C}E$ é igual ao ângulo que a reta (gráfico da função *f*) faz com *Ox*. E a tangente desse ângulo é igual à taxa média de variação de *f*, que, por sua vez, é igual a *a*.

Por isso, dizemos que *a* é a *inclinação* ou o *coeficiente angular* da reta, que coincide com o valor da *taxa média de variação* de *y* com relação a *x*, em qualquer intervalo.

Quando *a = 0*, ou seja, quando o coeficiente angular é nulo, o ângulo que a reta faz com *Ox* também é nulo e, portanto, a reta é paralela a *Ox*.

5. GRÁFICOS DE FUNÇÕES LINEARES

5.1 Exemplo: o gráfico de $y = f(x) = 2x + 1$

Para traçar o gráfico da função linear $y = f(x) = 2x + 1$ usamos o fato de que seu gráfico é uma reta e que uma reta está determinada se conhecemos dois de seus pontos.

Normalmente escolhemos dois pontos nas interseções com os eixos coordenados, por serem mais fáceis de determinar e de localizar.

A interseção com o eixo *Oy* é o ponto do gráfico de *f*, que tem abscissa igual a 0. Sua ordenada será $f(0) = 1$. Assim, o ponto $(0,1)$ é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo *Oy*.

A interseção com o eixo *Ox* é o ponto que tem ordenada igual a 0. Sua abscissa será encontrada ao resolvermos a equação $2x + 1 = 0$, o que nos leva a $x = -\frac{1}{2}$. O ponto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo *Ox*.

Esses pontos estão localizados na Figura 1, que representa o gráfico de $y = 2x + 1$.

5.2 Exemplo: o gráfico de $y = ax + b$

O gráfico da função $y = f(x) = ax + b$ é esboçado do mesmo modo que o da função do exemplo anterior.

A interseção do gráfico de *f* com o eixo *Oy* é o ponto $(0, f(0))$, que é igual a $(0,b)$, pois

$f(0) = a.0 + b = b$.

Para encontrarmos a interseção com o eixo *Ox*, devemos resolver a equação

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$, desde que *a* seja diferente de 0.

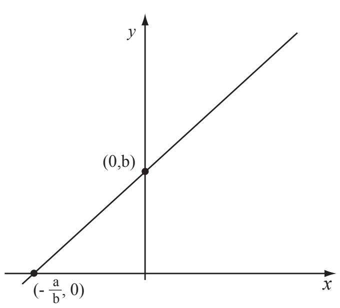


Figura 2 - O gráfico de $y = ax + b$, $a > 0$

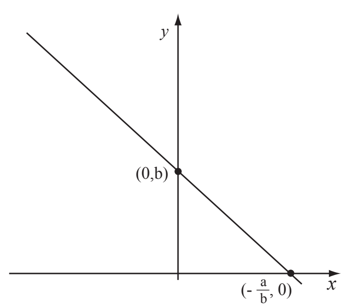


Figura 3 - O gráfico de $y = ax + b$, $a < 0$

5.3 Exemplo: o gráfico da função $y=-2$

A função $y=-2$ é uma função linear que tem coeficiente angular nulo, pois ela pode ser reescrita assim: $y=0.x-2$.

Seu gráfico é uma reta paralela a *Ox*, que intercepta *Oy* no ponto $(0,-2)$. Isso é coerente, já que a imagem de qualquer valor real pela função é – 2.

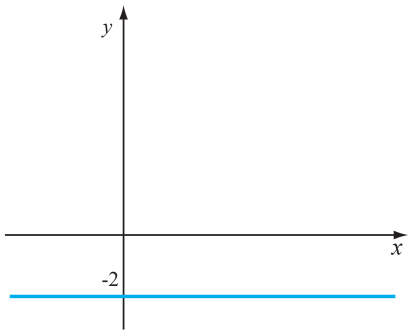


Figura 4 - O gráfico de $y=-2$.

6. DETERMINANDO A EQUAÇÃO DE UMA RETA

Uma *equação*[5] de uma reta que contém dois pontos dados pode ser obtida calculando sua *taxa média de variação a*. Lembrando que esta taxa deve ser constante para que os pontos no plano fiquem alinhados, escrevemos algebricamente a condição de que a *taxa média de variação* entre qualquer ponto (x,y) de seu gráfico e qualquer um de seus dois pontos conhecidos também seja *a*. Por exemplo, o *coeficiente angular* da reta que contém os pontos (0,3) e (–1,1) será

$$a=\frac{1-3}{-1-0}=\frac{-2}{-1}=2\,.$$

[5] Você sabe discutir o que são equações? Que diferenças há entre equações e funções? E entre seus gráficos?

Como discutimos ao final do exemplo 4.2 nesta aula, este coeficiente é também o valor da *taxa média de variação* da função que descreve a reta, no intervalo $[-1,0]$. Se (x,y) é um outro ponto qualquer da reta procurada, a *taxa média de variação* entre (x,y) e (0,3) (ou entre (x,y) e (–1,1)) também deve ser igual a 2:

$$2=\frac{y-3}{x-0}\Rightarrow y-3=2(x-0)\Rightarrow y=2x+3\,.$$

Portanto, uma equação da reta é $y=2x+3$, ou $y-2x-3=0$.

7. EXERCÍCIOS

1 - Utilize a Tabela 1 da Aula 1 para calcular a taxa média de variação da altura de André no intervalo de 0 a 4,5 meses e compare com as taxas médias nos intervalos de 0 a 1 mês, 1 a 2 meses, 2,5 a 3,5 meses, 3,5 a 4,5 meses. Interprete os resultados obtidos com relação ao crescimento da função altura.

2 - Seja $s = \frac{1}{2} gt^2$. Calcule sua taxa média de variação nos intervalos $[1,2]$ e $[3,4]$. O que você observa?

3 - Seja $y = f(x)$ uma função com domínio *IR* definida por $y = -x^3 + 2x^2 - 0,5x + 7$. Calcule a variação e a taxa média de variação de $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$.

4 - Encontre a equação da reta que contém os pontos $(-7,0)$ e $(0,0)$.

5 - Ache a equação da reta com inclinação m pelo ponto (a,c).

6 - Determine as interseções da reta $5y - 2x + 4 = 0$ com os eixos coordenados.

7 - Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = -x + 1$; b) $g(x) = -\sqrt{3}$; c) $h(x) = \frac{x}{2}$.

8 - O gráfico da temperatura Fahrenheit, °F, como função da temperatura em Celsius, °C, é uma reta. Você sabe que 212°F e 100°C representam, ambos, a temperatura a que a água ferve. Analogamente, 32°F e 0° C representam ambos o ponto de congelamento.

(a) Qual a inclinação do gráfico?

(b) Qual é a equação da reta?

(c) Use a equação para achar qual temperatura Fahrenheit corresponde a 20°C.

(d) Qual temperatura é o mesmo número de graus, em Celsius como em Fahrenheit?

9 - Uma companhia de aluguel de carros oferece carros a R$40,00 por dia e R$0,10 por *km*. Os carros de seu competidor custam R$50,00 por dia e R$0,06 por *km*.

(a) Para cada companhia, escreva uma fórmula dando o custo do aluguel de carro por um dia como função da distância percorrida.

(b) Sobre o mesmo eixo, esboce os gráficos de ambas as funções. Como você decidirá qual companhia é mais barata?

10 - Trace um gráfico da distância em relação ao tempo com as seguintes propriedades: a velocidade média é sempre positiva e a velocidade média na primeira metade do percurso é menor que a velocidade média na segunda metade.

REFERÊNCIAS

BELO HORIZONTE. Disponível em: <http://megaminas.globo.com/noticia.php?noticia=1451>. Acesso em: 14 jan. 2009.

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

AULA 3

Proporcionalidade e Funções Potência Inteira

Objetivos

- Estudar *relações de dependência* que nos permitem definir funções.
- Definir *Funções Potência Inteira*.

1. INTRODUÇÃO

As aulas anteriores destacaram as *funções* $y = ax + b$, que têm taxa de variação constante e são chamadas *funções lineares*. Por outro lado, mencionam fenômenos que não se modelam por funções como estas, como o movimento de um corpo em queda livre.

Nesta aula, vamos discutir outras *relações de dependência entre grandezas variáveis*, que também definem *funções*.

Estudamos ao final as *Funções Potência Inteira* em sua expressão geral $y = ax^p$, onde p é um número inteiro qualquer e a uma constante real.

2. RELACIONANDO GRANDEZAS

2.1 Proporcionalidade direta

Uma *relação de dependência* entre grandezas, comum, e que nos permite escrever relações funcionais entre variáveis, é a de *proporcionalidade direta*. Ela está presente em situações bastante simples e cotidianas, como descrito no exemplo a seguir.

2.1.1 Exemplo: indo à feira

Ao comprarmos mais de uma laranja, com preço k *reais* por unidade, o valor y a ser pago é $y = kx$, onde x é o número de laranjas que compramos.

Vendo de outro modo: se dividirmos o valor pago pelo número de laranjas compradas, obtemos o preço por unidade. E este resultado independe do número de laranjas compradas (a menos que haja promoções).

Em outras palavras: a *razão* entre as *grandezas* preço y a ser pago e número x de objetos comprados é sempre constante e igual a k, que é o preço por unidade do produto. Uma *relação entre grandezas* como esta é chamada *proporcionalidade direta*.

Leia a definição a seguir.

2.1.2 Definição:

Dizemos que uma variável (ou grandeza) y é *diretamente proporcional* à outra variável (ou grandeza) x se existir uma constante k tal que

$$y = kx,$$

na qual k é denominada *constante de proporcionalidade*.

2.1.3 Exemplo: a função $y = kx$ e seu gráfico

A relação entre grandezas *diretamente proporcional* expressa na Definição 2.1.2 é uma *função linear* $y = ax + b$, na qual a vale k e o *coeficiente linear* b vale zero.[1] Funções como esta, definidas por uma relação como $y = kx$, foram estudadas nas aulas anteriores, e seu gráfico é uma reta.

[1] Esta é, na verdade, a função que tem o nome de *função linear*. Funções de equação $y = ax + b$ são comumente denominadas *funções afim*. Nesta aula não faremos esta distinção.

2.2 Proporcionalidade inversa

Há situações em que uma grandeza variável é *proporcional* ao *recíproco* ou *inverso* de outra. Por exemplo, quando o produto de duas grandezas x e y é constante e igual a k $(k \neq 0)$, ou seja, $xy = k$, então variações em x provocam variações em y que se expressam por $y = \dfrac{k}{x}$. Veja no exemplo 2.2.1 uma situação em que isto acontece.

2.2.1 Exemplo: lei de Boyle

Dados experimentais possibilitaram aos cientistas enunciar que, se a temperatura T de uma massa gasosa for mantida constante, então, para valores baixos da densidade, o produto do volume V do gás pelo valor p da pressão é constante. Este resultado é conhecido como a *lei de Boyle*. Em linguagem matemática esta lei se expressa pela relação $pV = k$ ou pela *função* $V(p) = \frac{k}{p}$, onde k é uma constante.

Em casos como este, dizemos que as grandezas V e p são *inversamente proporcionais*.

2.2.2 Definição:

Dizemos que uma variável (ou grandeza) y é *inversamente proporcional* à outra variável (ou grandeza) x se existir uma constante k tal que

$$y = \frac{k}{x},$$

na qual k é denominada *constante de proporcionalidade*.

A função $V(p) = \frac{k}{p}$ no exemplo 2.2.1 pode ser escrita como $y = \frac{k}{x}$, mudando o nome das variáveis V e p para y e x. Representa uma relação de *proporcionalidade inversa* entre variáveis, como na Definição 2.2.2. Funções $y = \frac{k}{x}$ reescrevem-se[2] também como $y = kx^{-1}$, correspondendo então a uma *função potência inteira* $y = ax^{p}$, com $p = -1$. A função $y = ax^{-1}$ ainda não foi estudada aqui e será apresentada a seguir, no caso especial em que $a = 1$.

[2] Vamos assumir, como é sabido, que se $p < 0$, então $x^{p} = \frac{1}{x^{|p|}}$. Neste caso, a função $y = \frac{1}{x}$ será reinterpretada como $y = x^{-1}$ e incluída também no conjunto de *funções potência inteira*.

2.2.3 Exemplo: a função $y = x^{-1}$ e seu gráfico

O domínio D da função é o conjunto dos números reais, exceto $x = 0$. Escrevemos: $D = \{x \in IR : x \neq 0\}$ ou, $D = IR - \{0\}$.

Observe que se $x > 0$, então $\frac{1}{x} > 0$, e se $x < 0$, então $\frac{1}{x} < 0$. Isso quer dizer que o gráfico da função situa-se no 1º e 3º quadrantes.

Interessante observar que em funções definidas por relações de *proporcionalidade inversa* em que $k > 0$ o *crescimento* em uma das variáveis provoca o *decrescimento* da outra (se nos mantivermos em um mesmo quadrante).[3] Observe também que para valores positivos e bem pequenos de x o valor $\frac{1}{x}$ é muito grande e positivo (por exemplo, se $x = 0{,}00000123$, então $\frac{1}{x} = 813.008{,}1301$). Para valores muito grandes de x o valor $\frac{1}{x}$ é muito pequeno (por exemplo, se $x = 12.345.678$, então $\frac{1}{x} = 8{,}10000664 \times 10^{-8}$).

[3] Verifique na primeira relação, descrita na definição 2.1.2: se $k > 0$, que o crescimento ou decrescimento em uma variável produz o crescimento ou decrescimento na outra. Compare com o que acontece no caso da proporcionalidade inversa, em cada um dos quadrantes, separadamente, para $k > 0$. Formalmente, escrevemos: para $k > 0$, $a > 0$; $b > 0$, se $a > b$, então $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$.

Geometricamente, isso significa que quando a abscissa x de um ponto no gráfico de $y = \frac{1}{x}$ está muito próxima da origem e à direita dela, a ordenada correspondente é muito grande e positiva.

Observe assim que a distância entre o gráfico dessa função e o eixo das ordenadas é muito pequena e fica cada vez menor à medida que x se aproxima da origem.

Também, quando a abscissa x é muito grande e positiva, a ordenada correspondente é muito pequena, e a distância entre o ramo do gráfico da função e o eixo das abscissas é muito pequena e fica cada vez menor à medida que x cresce.[4]

[4] As retas $x = 0$ e $y = 0$ são chamadas assíntotas do gráfico. Dizemos também que a curva se aproxima assintoticamente das retas. Este conceito será retomado e definido em aula posterior.

Considerações semelhantes a estas sobre $y = \frac{1}{x}$ podem ser feitas considerando valores negativos de x. Procure explorar estas ideias consultando o gráfico da função para confirmar suas conclusões.

O gráfico da função está esboçado a seguir. A curva desenhada tem o nome de *hipérbole*. Confira ainda, na Figura 1, que a função é *decrescente* em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$.

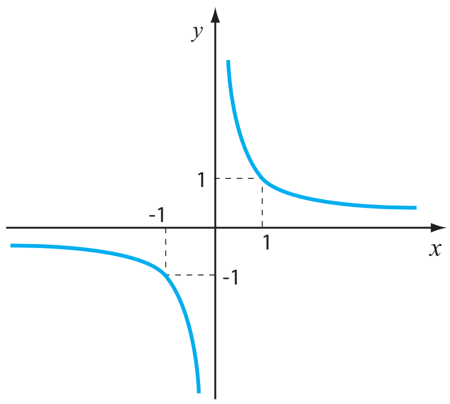


Figura 1 - O gráfico de $y = \frac{1}{x}$

2.3 Proporcionalidade entre potências de variáveis

Há *relações de dependência* entre duas variáveis em que a *proporcionalidade* acontece entre uma das variáveis e uma *potência* da outra.

2.3.1 Exemplo: queda livre

O exemplo 2.3 da Aula 1 discutiu o movimento de um corpo em queda livre, descrito pela função $s = \frac{1}{2}gt^2$. Veja que a variável s é proporcional à potência quadrada de t, com constante de proporcionalidade igual a $k = \frac{1}{2}g$.

Relações como estas definem as *funções potência inteira* de x, que são nosso objetivo nesta aula. Leia a definição de *funções potência inteira* de x, a seguir.

2.3.2 Definição

Uma função $y = f(x)$ é uma *função potência inteira* de x se é *proporcional* a uma potência inteira constante de x; ou seja, $y = f(x) = a.x^p$, onde a é uma constante e p é um número inteiro, chamado *expoente*.

Veja o exemplo a seguir, que retoma a expressão $s = kt^2$, como no exemplo 2.3.1, no caso especial em que $k = 1$.

2.3.3 Exemplo: a função $y = x^2$ e seu gráfico

Esta função e seu gráfico já é nosso conhecido da Escola Básica. A seguir, o seu esboço.

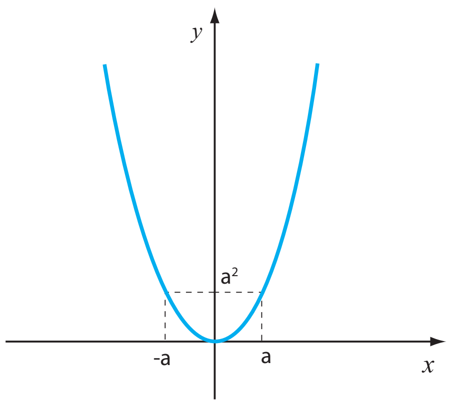


Figura 2 - O gráfico de $y = x^2$

Vamos retomar alguns de seus aspectos importantes de serem relembrados.

A função $y = f(x) = x^2$ está definida em IR, uma vez que para todo número real podemos efetuar o produto $x.x = x^2$. Esta quantidade $x.x$ será zero se, e somente se, $x = 0$. Esse será o menor valor que a função vai assumir, uma vez que $x^2 > 0$ para todo número real x, $x \uparrow 0$. A propriedade algébrica $x^2 \geq 0$ é indicada, geometricamente, pelo fato de o seu gráfico estar situado no 1º e 2º quadrantes, como confirmado no esboço.

3. RELACIONANDO PROPRIEDADES GRÁFICAS E ALGÉBRICAS: SIMETRIAS

Os gráficos desenhados nas figuras 1 e 2 sugerem propriedades interessantes, essenciais para sistematizar o estudo de funções $y = ax^p$, em geral. Estas propriedades são estudadas aqui.

Observe na Figura 2 que a parte do gráfico da parábola que está no 1º quadrante parece sobrepor-se à do 2º se "dobrarmos o plano cartesiano" ao longo do eixo Oy. Quando isto é verdade, dizemos que o gráfico é *simétrico* em relação a Oy.

Veja agora a Figura 1, com o gráfico da hipérbole. Observe que se "dobrarmos o plano cartesiano" ao longo do eixo Oy e depois ao longo do eixo Ox, o ramo da hipérbole no 1º quadrante parece sobrepor-se ao do 3º. De outro modo: "dobrando o plano cartesiano" ao longo da reta $y = x$, o ramo no 1º quadrante parece sobrepor-se ao do 3º. Quando acontece isso, dizemos que o gráfico é *simétrico* em relação à origem.

Vamos estudar tais *simetrias*, relacionando-as a condições algébricas para sua ocorrência.

3.1 Simetria em relação ao eixo Oy

Iniciamos com o significado de simetria em relação ao eixo Oy no caso de dois pontos.

3.1.1 Definição

Dois pontos P e Q são simétricos em relação ao eixo Oy se a reta PQ é perpendicular ao eixo Oy e ambos os pontos são equidistantes do eixo.

Em coordenadas, temos que se $P = (a,b)$, então $Q = (-a, b)$. Veja a Figura 3.

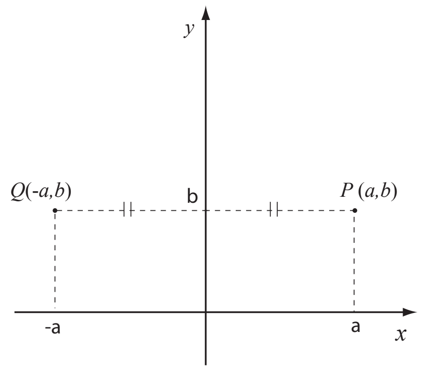


Figura 3 - Simetria em relação ao eixo Oy

Retomando a função $y = x^2$, veja que, uma vez que $(-a)^2 = a^2$, ambos os pontos (a, a^2) e $(-a, a^2)$ pertencem ao seu gráfico, sendo ambos simétricos em relação ao eixo Oy.

Essa relação representa uma característica *algébrica* de $y = x^2$ que define uma classe de funções, denominadas *funções pares*.

3.1.2 Definição

Seja f uma função com domínio D, tal que se $x \in D$, então $-x \in D$. Dizemos que f é uma função par se $f(x) = f(-x)$, para qualquer $x \in D$.

O fato de o gráfico da função $y = x^2$ ser simétrico em relação ao eixo Oy decorre dessa propriedade algébrica, como confirmado na proposição a seguir.

3.1.3 Propriedade

Se f é uma função par, então seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.

Demonstração:

Se f é uma função par, então, para qualquer número real a, temos que $f(a) = f(-a)$. Portanto, se $P = (a, f(a))$ pertence ao gráfico, então $Q = (-a, f(-a)) = (-a, f(a))$ também pertence, e são simétricas em relação ao eixo Oy.

3.2 Simetria em relação à origem O

Retomamos a função $y = x^{-1}$, observando que os pontos de coordenadas $M = (a, a^{-1})$ e $N = (-a, -a^{-1})$ pertencem a seu gráfico, pois $y = (-a)^{-1} = -(a)^{-1}$.[5]

Os pontos M e N são *simétricos em relação à origem*.

[5] Verifique, reescrevendo $(-a)^{-1} = \frac{1}{(-a)}$.

3.2.1 Definição

Dois pontos P e Q são *simétricos* em relação à origem 0, se e somente se, 0 é ponto médio do segmento de reta PQ.

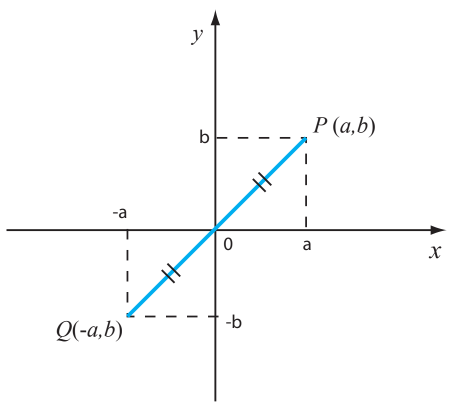


Figura 4 - Simetria em relação à origem

Escrevendo em coordenadas $P=(a,b)$, a equação da reta que passa por P e O é $y=\frac{b}{a}x$. Logo, o ponto $Q=(-a,-b)$ também pertence a essa reta, e $d(P,O)=d(Q,O)$, o que mostra que (a,b) e $(-a,-b)$ são simétricos em relação à origem.

Funções como $y=x^{-1}$, que satisfazem a condição $f(-a)=-f(a)$, são denominadas *funções ímpares*.

3.2.2 Definição

Seja f uma função com domínio D, e tal que se $x\in D$, então $-x\in D$. Dizemos que f é uma função *ímpar* se $f(-x)=-f(x)$ para qualquer $x\in D$.

Essa condição algébrica se traduz graficamente pela *simetria* do gráfico *em relação à origem*.

3.2.3 Proposição

Se f é uma função *ímpar*, então seu gráfico é *simétrico em relação à origem*.

Demonstração:

Se f é uma função *ímpar*, e os números reais a e $-a$ pertencem ao seu domínio, então $f(a)=-f(-a)$. Portanto, os pontos $P=(a,f(a))$ e $Q=(-a,f(-a))=(-a,-f(a))$ pertencem ao gráfico de f, e eles são simétricos em relação ao ponto $O=(0,0)$.

3.2.4 Exemplo: a função $y=x^3$ e seu gráfico

A função $y=f(x)=x^3$ é um exemplo de *função ímpar* que vale a pena ser estudado antes do caso geral das *funções potência*.

Ela tem domínio IR e $f(x)=0$ se e somente se $x=0$.

Diferentemente da função $y=x^2$, temos que

$x>0\Rightarrow x^3>0$ e

$x<0\Rightarrow x^3<0$.

Na verdade, a função $y=x^3$ é uma função ímpar, pois, para qualquer a real, $(-a)^3=-a^3$. Os pontos de coordenadas $M=(a,a^3)$ e $N=(-a,-a^3)$ pertencem ao gráfico da função $f(x)=x^3$, esboçado na Figura 5. Veja que a função é *crescente* em seu domínio.

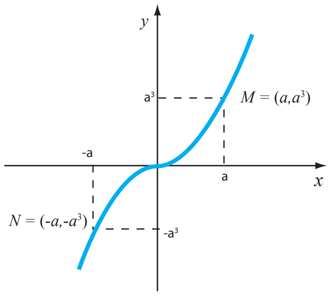


Figura 5 - Gráfico da função $f(x) = x^3$

A partir de agora estamos em melhores condições de estudar o caso geral de funções potência $y = ax^p$, onde p é um número inteiro.

4. FUNÇÕES POTÊNCIA $y = x^p$, ONDE p É UM NÚMERO INTEIRO

Nesta aula, o estudo das funções $y = ax^p$, onde p é um número inteiro, está restrito ao caso especial em que $a = 1$. A discussão do efeito dos coeficientes no gráfico de $y = ax^p$, p inteiro e $a \in IR$, é deixada como exercício. Casos em que valores p são naturais pares e ímpares são discutidos em seções distintas, seguidos dos casos em que p assume valores negativos.

4.1 Funções $y = x^n$, onde n é um número natural par

Funções $y = x^n$, onde n é um número natural par, são funções *pares*. Deixamos para você verificar essa afirmação. Seu gráfico assemelha-se ao de $y = x^2$, e, independentemente do valor de n, o gráfico situa-se no 1º e 2º quadrantes.[6]

Na Figura 6, o esboço de $y = x^4$, em um mesmo sistema de coordenadas em que está esboçado o gráfico de $y = x^2$, para podermos compará-los.

[6] Você sabe justificar esta afirmação?

Observe que para qualquer valor de n par, o gráfico da função $y = x^n$ passa pelos pontos $(1,1)$ e $(-1,1)$.

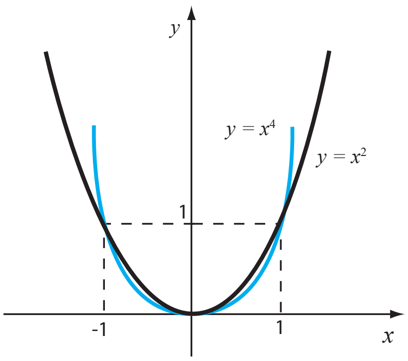


Figura 6 - Gráficos de $y = x^2$, $y = x^4$

As desigualdades a seguir, satisfeitas por essas potências, são deixadas como exercício:

$$x < -1 \text{ ou } x > 1 \;\Rightarrow\; \ldots\; x^6 > x^4 > x^2$$

e

$$-1 < x < 1,\; x \uparrow 0 \Rightarrow \ldots\; x^6 < x^4 < x^2 .$$

No gráfico da Figura 6 você saberia situar as funções $y = x^6$ e $y = x^8$?

4.2 Funções $y = x^n$, onde n é um número natural ímpar

Funções $y = x^n$, onde n é um número natural ímpar, são funções *ímpares*. Seu gráfico assemelha-se ao de $y = x^3$. Independentemente do valor de n, o gráfico situa-se no 1º e 3º quadrantes.

Na Figura 7, o esboço de $y = x^5$, em um mesmo sistema de coordenadas em que está esboçado o gráfico de $y = x$ e $y = x^3$, para podermos compará-los.

Observe que para qualquer valor de n par, o gráfico da função $y = x^n$ passa pelos pontos (1,1) e (–1,–1).

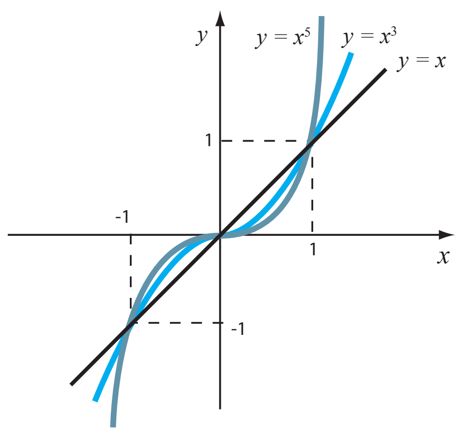


Figura 7 - Gráficos de $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$

As desigualdades a seguir são satisfeitas por essas potências:

$$x > 1 \Rightarrow \ldots x^7 > x^5 > x^3 > x$$

e

$$0 < x < 1 \Rightarrow < x^7 < x^5 < x^3 < x .$$

Para $x > 1$, o significado geométrico das desigualdades é que os gráficos vão ficando cada vez mais em pé, pois para x muito grande, quanto maior o valor de n, maior será o valor correspondente a x^n.[7]

[7] No gráfico da Figura 7, você sabe situar as funções $y = x^7$ e $y = x^9$?

4.3 Funções $y = x^{-n}$, onde n é um número natural ímpar.

O gráfico de tais funções assemelha-se ao da função $y = x^{-1}$. Além de serem funções ímpares, a discussão sobre o comportamento da função para valores de x muito pequenos, e muito grandes, é idêntica à de $y = x^{-1}$. Seu esboço está na Figura 8.

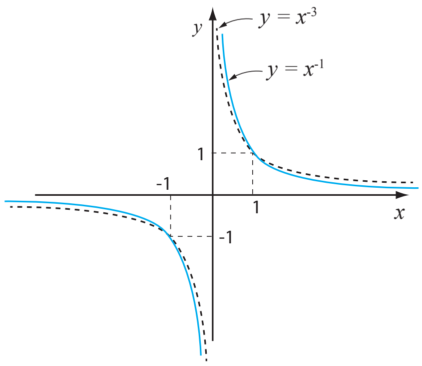


Figura 8 - Gráfico de $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$.

4.4 Funções $y = x^{-n}$, onde n é um número natural par.

Para n natural par, o gráfico, esboçado a seguir, se assemelha ao de

$y = x^{-2}$ ou $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Veja que $y = x^{-2}$ é uma função par, e, portanto, há simetria em relação ao eixo Oy.

Além disso, os valores de $y = \dfrac{1}{x^2}$ são sempre positivos, o que significa que o gráfico está contido no 1º e 2º quadrantes, sendo *decrescente* para $x > 0$ e *crescente* para $x < 0$.

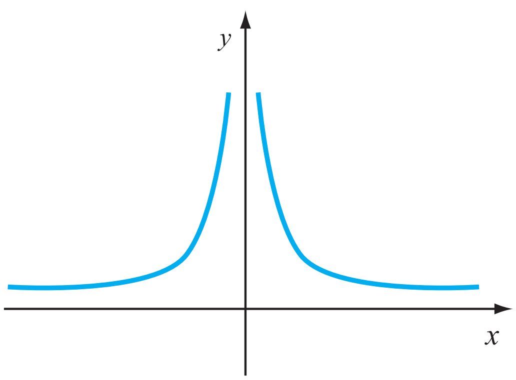


Figura 9 - Gráfico de $y = x^{-2}$

5. COMENTÁRIO FINAL: AINDA SOBRE SIMETRIAS

Veja na figura a seguir a relação que está sendo sugerida entre os pontos P e Q.

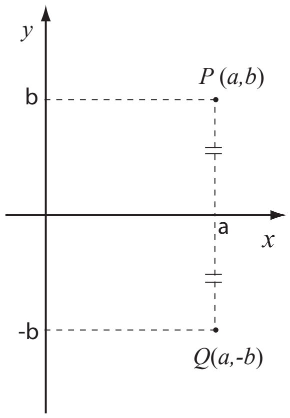


Figura 10 - Simetria em relação ao eixo Ox

A representação sugere que P e Q pertencem a uma reta vertical de equação $x = a$.

Suas ordenadas são, respectivamente, b e $-b$. Se "dobrarmos o plano cartesiano sobre o eixo Ox", um ponto irá se sobrepor ao outro. Num caso como esse, dizemos que P e Q são *simétricos* em relação ao eixo Ox.

5.1 Definição

Dizemos que P e Q são *simétricos* em relação ao eixo das abscissas Ox se a reta PQ é perpendicular ao eixo Ox, e os pontos P e Q são equidistantes de Ox (isto é, ambos os pontos estão à mesma distância do eixo).

Deixamos para você verificar que os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ são relacionados desta forma; ou seja, são simétricos em relação ao eixo Ox. Antes de pensar o caso geral, estude os gráficos de $y = x^2$ e $y = -x^2$. Faça um esboço e verifique se seus pontos estão relacionados como na Definição 5.1.

EXERCÍCIOS

1 - Mostre que a função $y = -x^3$ é uma função ímpar. Desenhe seu gráfico.

2 - Esboce os gráficos de $y = -x^2$, $y = -x^4$ e $y = -x^6$ em um mesmo sistema de coordenadas e escreva, em linguagem algébrica, as desigualdades correspondentes às posições relativas das três curvas.

3 - Discuta o efeito dos coeficientes no gráfico de $y = ax^p$, p inteiro e $a \in IR$.

4 - Esboce os gráficos de $y = -2x^3$ e $y = -5x^3$, em um mesmo sistema de coordenadas.

REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

AULA 4

Funções novas, a partir das já conhecidas

Objetivos

- Definir *Operações Algébricas* com funções.
- Estudar procedimentos para produzir novas funções por meio de *Translações*.
- Apresentar a noção de *Função Definida por Partes*.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos formalizar procedimentos e operações que já temos utilizado ao trabalhar com funções. Apresentamos ainda modos de obter novas funções a partir do gráfico de uma função conhecida, relacionando-os às respectivas mudanças nas fórmulas que as expressam. Iniciamos formalizando algumas *operações com funções*.

2. OBTENDO NOVAS FUNÇÕES ALGEBRICAMENTE

2.1 Definição

Sejam f e g funções com domínio D. Definimos as funções *soma*, *subtração*, *multiplicação* e *quociente* de f e g por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para } x \text{ em } D, \text{ tal que } g(x) \uparrow 0$$

2.2 Exemplos: obtendo novas funções

1. A função $s = \frac{1}{2}gt^2$, que foi estudada no exemplo 2.3 da Aula 1, pode ser interpretada como o *produto* da função constante $f(t) = \frac{1}{2}g$ por $h(t) = t^2$.

2. A partir da função $f(x) = x$ podemos obter as funções, definidas para todo $x \in IR$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, onde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ são números reais e *n* é número natural. A função $p : IR \to IR$ é chamada *função polinomial*.

Se $a_n \uparrow 0$, dizemos que *p* tem grau *n*.

3. Dadas duas *funções polinomiais* $p(x)$ e $q(x)$, podemos construir a função
$f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, cujo domínio é $D = \{x \in IR : q(x) \neq 0\}$.

Esta função, *quociente* de dois polinômios, é chamada *função racional*.

3. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Ao calcularmos o valor de uma função num ponto utilizando uma calculadora ficamos atentos à ordem com que apertamos suas teclas. Por exemplo, para a função $h(t) = (t+1)^2$, como obter o valor $h(23,7)$ utilizando uma calculadora?

Primeiro, somamos 1 ao número 23,7. Obtemos 24,7. Depois, elevamos o resultado ao quadrado. Ou seja, calculamos $(24,7)^2$. Veja que, essencialmente, o comando $h(t) = (t+1)^2$, num ponto arbitrário *t*, pode ser visto como a *sequência ordenada de ações* das seguintes funções:

1º - cálculo de $f(t) = t + 1$

2º - cálculo de $g(u) = u^2$, onde $u = f(t)$.

Em casos assim dizemos que a função $h(t) = (t+1)^2$ é a *composta* das funções *f* e *g*.

3.1 Definição

Sejam f e g funções com domínios D_1 e D_2, respectivamente, de tal modo que se x pertence a D_1, então $f(x)$ pertence a D_2.

Definimos a *função composta* $g \circ f$ como a função com domínio D_1, tal que $g \circ f(x) = g(f(x))$, para qualquer x pertencente a D_1.

Veja que a *função composta* pode ser interpretada como a *coordenação de ações ou comandos*

$x \to f(x) \to g(f(x))$

O primeiro comando consiste na ação interna f e o segundo, na ação externa de g.

3.3 Exemplos

1. Como escrever a função $y = (x-3)^4$ como a composta de duas funções f e g? Pense em como calcular o valor da função em um ponto, utilizando uma calculadora:

- o primeiro comando seria calcular x–3, ou seja, subtrair 3.
- o segundo comando seria elevar o resultado à quarta potência.

As funções envolvidas são $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^4$. Então $y = (x-3)^4 = (g \circ f)(x)$.

De outro modo:

O primeiro comando é $u(x) = x - 3$.

O segundo é $y(u) = u^4$. A composta é $y = (u(x))^4$.

2. Para $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^3 + 1$, temos:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1) = (x^3 + 1) - 2 = x^3 - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-2) = (x-2)^3 + 1$

3. Se f e g são as funções do exemplo 2, então

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0-2) = (0-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$

4. OBTENDO NOVAS FUNÇÕES POR TRANSLAÇÕES

Na seção anterior estudamos como obter expressões algébricas e valores de funções a partir de operações com funções dadas por fórmulas.

Aqui vamos aprender como podemos obter o gráfico de determinadas funções, a partir de outras já conhecidas.

4.1 Translações verticais

Gráficos de algumas funções podem ser obtidos por meio de um movimento no plano que chamamos *translação vertical*. Por exemplo, veja na Figura 1 como estão relacionados os gráficos das funções $f(x)=x^2$ e $g(x)=x^2+1$

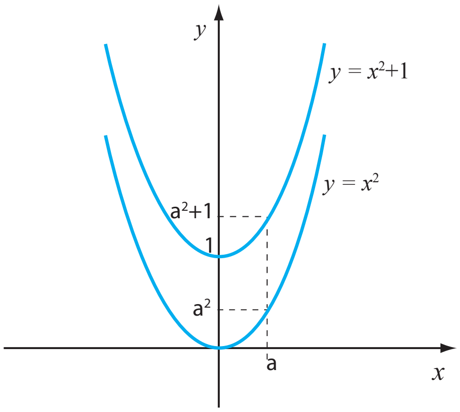


Figura 1 - Translação vertical de $y=x^2$

Observe que o ponto $(0,0)$ no gráfico de $f(x)=x^2$ se desloca para o ponto $(0,1)$ no gráfico de $g(x)=x^2+1$. O ponto $(1,1)$ se desloca para $(1,2)$.

De modo geral, ressaltamos que:

O gráfico de $y=f(x)+c$ pode ser obtido do gráfico de $y=f(x)$ por meio de um deslocamento vertical, chamado *translação vertical*, de c unidades.

Se a constante c é positiva, então o deslocamento é para cima.

Se a constante c é negativa, então o deslocamento é para baixo.

4.2 Translações horizontais

De modo semelhante, há gráficos de funções $y=g(x)$ que podem ser obtidos do gráfico de uma função $y=f(x)$ por meio de uma *translação horizontal*.

O gráfico de $y=f(x-c)$ pode ser obtido do gráfico de $y=f(x)$ por meio de uma *translação horizontal*, de c unidades.

Se a constante c é positiva, então o deslocamento é para a direita.

Se a constante c é negativa, então o deslocamento é para a esquerda.

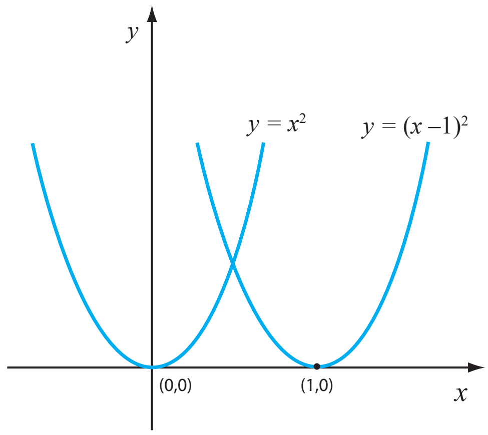


Figura 2 - Translação horizontal de $y = x^2$

Veja como estão relacionados os gráficos de $y = x^2$ e $y = (x-1)^2$. Observe que o ponto (0,0) no gráfico de $y = x^2$ corresponde a (0,1) no gráfico transladado.

4.3 Combinando translações

Podemos combinar os movimentos de *translação horizontal* e *translação vertical*.

O gráfico de $y = f(x-c)+k$ pode ser obtido do gráfico de $y = f(x)$ por meio de uma *translação horizontal*, de c unidades, seguido de uma *translação horizontal* de k unidades. O ponto $V = (c,k)$ é chamado *centro da translação*.

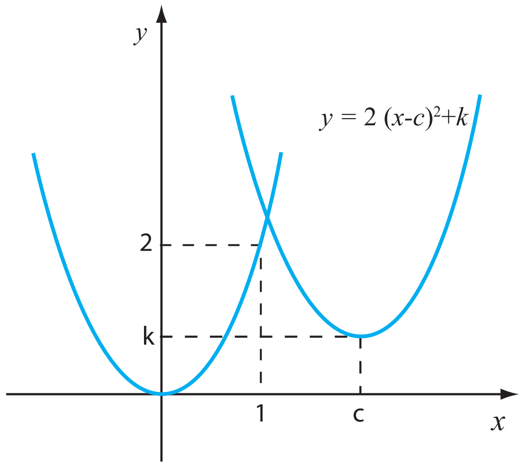


Figura 3 - Translações horizontal e vertical da parábola $y = 2x^2$

A ordem com que fazemos os dois movimentos é indiferente.

4.4 Completando quadrados

O gráfico de $p(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = ax^2$ reescrevendo $p(x)$ na forma $a(x-k)^2 + h$ (que é a expressão de uma *translação*).

Vamos trabalhar com um exemplo. Ele é representativo do caso geral, no sentido de que o procedimento para resolver o caso geral é semelhante.

Seja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Procedemos da seguinte forma:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}\right).$$

Ou seja,

$$f(x) = 2\left[(x-1)^2 + \frac{3}{2}\right] = 2(x-1)^2 + 3.$$

Este processo é denominado *completando quadrados*, e pode ser feito para qualquer trinômio do segundo grau. Deixamos para você fazer o esboço do gráfico.

5. DEFININDO FUNÇÕES POR PARTES

Muitas funções são expressas por meio de combinações de diferentes fórmulas algébricas, definidas em intervalos distintos de *IR*.

Um exemplo é a função preço da corrida de táxi, que retomamos como nosso primeiro exemplo.

5.1 Exemplo: função preço da corrida de táxi

Como vimos, o valor da bandeirada dos táxis em Belo Horizonte é R$3,30, e o quilômetro rodado é R$2,04. Escrevemos a expressão $P(d) = 3,30 + 2,04d$ para expressar o preço a ser pago por quilômetro rodado *d*, sabendo que o valor do preço a ser pago se altera apenas quando o percurso de um quilômetro é concluído. Assim, a expressão da função que relaciona o preço *P* e a quilometragem *d*, para $d \in [0,4]$, pode ser representada por

$$P(d) = \begin{cases} P(0) = 3,30 + 2,.4.0, & se \quad 0 \le d < 1 \\ P(1) = 3,30 + 2,04.1, & se \quad 1 \le d < 2 \\ P(2) = 3,30 + 2,04.2, & se \quad 2 \le d < 3 \\ P(3) = 3,30 + 2,04.3, & se \quad 3 \le d < 4. \end{cases}$$

Em cada um dos intervalos, a função algébrica é constante. Seu gráfico, formado por vários segmentos horizontais, já foi esboçado.

5.2 Exemplo: a função valor absoluto

Dado um número real a, o seu valor absoluto é definido geometricamente como a sua distância d à origem 0 na reta ordenada:

$$|a| = d(a,0)$$

Informalmente, costumamos dizer: o valor absoluto é o "número sem o sinal".

A função que associa a cada número real x o seu valor absoluto é expressa por $f(x) = |x|$, ou também pode ser definida por partes, como no caso do exemplo anterior, pelas expressões:

$$|x| = \begin{cases} -x & se \quad x < 0 \\ x & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Veja que ela é uma função par (pois $d(x,0) = d(-x,0)$), e seu gráfico se esboça como a reunião de duas semirretas: a parte da reta $y = x$, que está no 1º quadrante, e a parte da reta $y = -x$, que está no 2º quadrante.

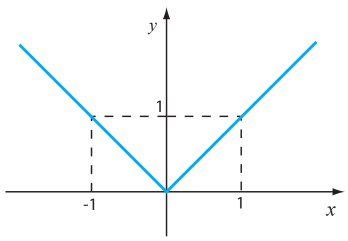


Figura 4 - Gráfico da função valor absoluto

5.3 Exemplo

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 0 \\ x & se \quad x > 0. \end{cases}$

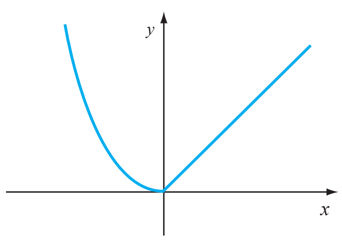


Figura 5 - Gráfico de função dada em partes por $y = x^2$ e $y = x$

Para calcular o valor dessa função num ponto, analisamos se ele é positivo ou negativo, para identificar qual fórmula utilizar.

Seu gráfico é dado pela união da semirreta $y = x$, localizada no 1º quadrante, com a parte da parábola $y = x^2$, que está situada no 2º quadrante.

EXERCÍCIOS

1 - Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcule a composta $f(f(x))$. Qual é o domínio da função composta?

2 - Se $f(t) = t^3$ e $g(t) = t - 2$, determine:

(a) $f(g(2))$

(b) $g(f(2))$

(c) $f(g(u))$

(d) $g(t-1)$

(e) $g(g(t))$

3 - A partir do gráfico de $y = x^2$, esboce o gráfico de $y = 3x^2 - 1$.

4 - Para cada uma das funções, reescreva sua expressão na forma $y = a(x-c)^2 + k$ e, utilizando translações, esboce seu gráfico especificando: coordenadas do vértice, se é voltada para cima ou para baixo e o eixo de simetria.

(a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$

(b) $f(x) = -2x^2 + 4x$

(c) $f(x) = x^2 + 8x - 23$

5 - Esboce os gráficos das funções:

(a) $y = f(x+1)$

(b) $y = f(x-3)$

(c) $y = f(x) - 2$

(d) $y = f(x) + \sqrt{2}$

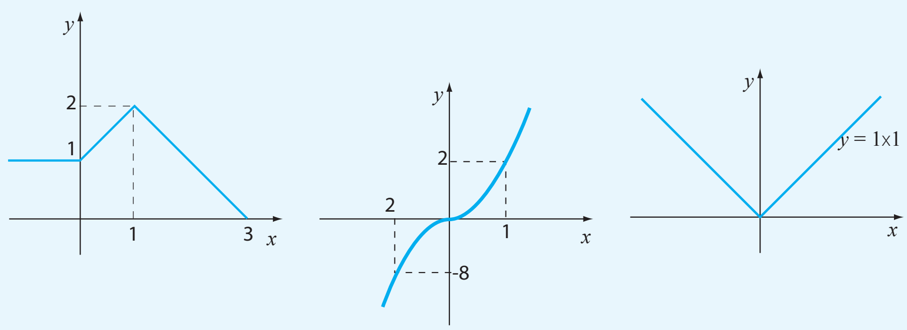
6 - Para cada uma das funções $y = f(x)$, esboce os gráficos de

(a) $y = f(x) + 2$

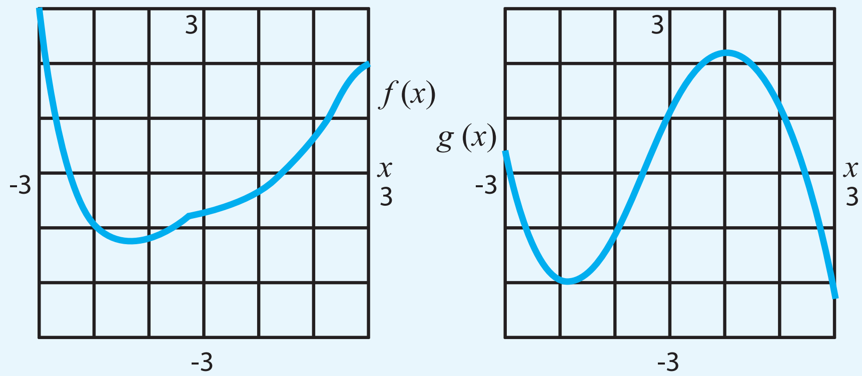
(b) $y = f(x-1)$

(c) $y = 3f(x)$

(d) $y = -f(x)$



7 - Sejam f e g dadas pelo gráfico a seguir.



Faça estimativas para os valores de: $f(g(0))$, $g(f(-1))$, $f(f(2))$.

8 - Utilize o gráfico abaixo para representar graficamente as seguintes funções:

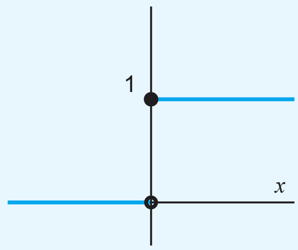
(a) $2H(x)$

(b) $H(x)+1$

(c) $H(x+1)$

(d) $-H(x)$

(e) $H(-x)$



REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

AULA 5

Funções Inversas

Objetivos

- Definir *Funções Inversas*.
- Estudar propriedades básicas.
- Definir *Potências Racionais*.

1. INTRODUÇÃO

Existem pares de regras (ou de operações) relacionadas de tal modo que, essencialmente, uma desfaz a ação da outra. Quando tais regras representam funções, isto quer dizer que existem pares de funções em que uma função desfaz a ação da outra.

Pares de funções com tal propriedade têm o nome de *funções inversas*, e dizemos que uma função do par é inversa da outra.

Nesta aula, vamos conceituar *funções inversas* e utilizar esse conceito para resolver problemas e para definir novas funções, a partir das já estudadas.

2. EXEMPLO: ENCONTRANDO A INVERSA DE $y = 2x + 3$

Como desfazer a ação representada em $y = 2x + 3$ por meio da ação de outra função? Para responder a essa pergunta, interpretamos a função $y = 2x + 3$ como uma sequência de comandos, por meio de representações gráficas e por equações.

As expressões da *função inversa* em cada uma dessas três representações estão relacionadas e se complementam, compondo a noção que vamos estudar.

2. 1 Neutralizando comandos: o caso de $y = 2x + 3$

A ação de uma função num ponto pode ser interpretada como o processamento de uma sequência de comandos ou ações. Como no exemplo 3 da Aula 4, para perceber isso, imagine-se calculando o valor da função $y = 2x + 3$ em um ponto, utilizando uma calculadora: selecionamos o número x e o multiplicamos por 2; aparece um resultado no visor da calculadora; a esse resultado, adicionamos 3.

Que sequência de comandos desfaz a ação de $y = 2x + 3$ em um ponto arbitrário x de seu domínio? Ou seja, partindo do último número y no visor da calculadora, haveria como recuperar o valor x inicial? Da descrição da sequência de comandos que $y = 2x + 3$ representa, podemos recuperar tal valor tomando o valor y e subtraindo 3, e depois dividindo o resultado por 2.

Em outras palavras, a sequência de ações que desmancha a regra "duplicar e somar 3" será: "subtrair 3 e dividir tudo por 2", nesta ordem.[1]

Representando matematicamente a última sequência de comandos, diremos que $y = \frac{(x-3)}{2}$ desfaz a ação da função $y = 2x + 3$.

Ou seja, as funções $y = \frac{(x-3)}{2}$ e $y = 2x + 3$ constituem um par de *funções inversas*, e dizemos: $y = \frac{(x-3)}{2}$ é a *inversa* de $y = 2x + 3$.

Também a função $y = 2x + 3$ desfaz a ação de $y = \frac{(x-3)}{2}$, pois se esta última desfaz a ação da primeira, a primeira desfaz a ação da última. Ou seja:

se $y = \frac{(x-3)}{2}$ é *inversa* de $y = 2x + 3$, então $y = 2x + 3$ é *inversa* de $y = \frac{(x-3)}{2}$.

Verifique essa afirmativa descrevendo $y = \frac{(x-3)}{2}$ como uma sequência de comandos!

[1] De modo geral, sempre que uma função é representada por uma expressão algébrica, podemos interpretar sua ação num ponto de seu domínio como o processamento de uma sequência de "comandos", como descrito neste exemplo 2.1. Na verdade, quando estamos utilizando calculadoras, processamos tais sequências de comandos ao calcular o valor y da função $y = f(x)$, em um dado ponto x, de seu domínio.

2.2 O significado da inversa de $y = 2x + 3$, em seu gráfico

O gráfico de $y = 2x + 3$, esboçado na Figura 1, foi construído do seguinte modo:

para cada valor de x no domínio da função, modificamos este valor pela regra $2x + 3$ e localizamos no plano cartesiano o ponto (x, $2x + 3$), de ordenada $y = 2x + 3$.

A construção de uma *inversa* para esta função, graficamente, procura responder à questão:

fixada a ordenada de um ponto sobre o gráfico de $y = 2x + 3$ *(dado um valor y), como recuperar o valor da abscissa (como recuperar o valor de x)?*

Na Figura 2, procuramos ilustrar esse procedimento.

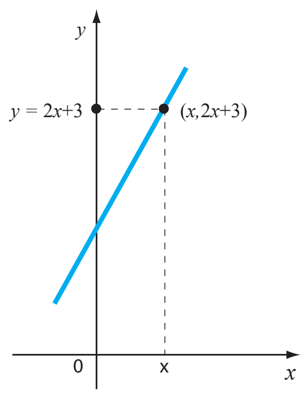


Figura 1 - Gráfico de $y=2x+3$

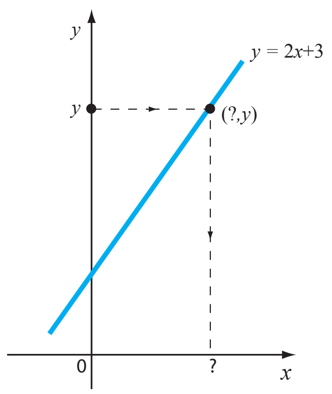


Figura 2 - Dado o valor de y, como recuperar a abscissa na relação $y=2x+3$

2.3 A inversa de $y = 2x + 3$, resolvendo uma equação algébrica

Em termos algébricos, o procedimento em 2.2 corresponde a resolver a equação $y = 2x + 3$, em termos de y, buscando responder à questão:

fixada uma ordenada y arbitrária, como determinar a abscissa x, em função dela?

Em termos algébricos, isso corresponde a escrever

$2x = y - 3$, ou seja, $x = \dfrac{(y-3)}{2}$.

Esse resultado pode ser lido como o comando em y “subtrair 3 e dividir por 2”, nessa ordem, e corresponde à *inversa* da função $y = 2x + 3$ obtida em 2.1.

2.4 Notação e linguagem

É usual darmos o nome x às variáveis no domínio de uma função e denominarmos y às variáveis dependentes. Por isto, reescrevemos a relação $x = \dfrac{(y-3)}{2}$, que representa a *função inversa* como $y = \dfrac{(x-3)}{2}$; ou seja, permutamos o x com o y na equação encontrada, após resolvê-la algebricamente em termos de y.

Muitos de vocês já devem ter procedido assim, quando determinando *inversas*.

3. DESFAZENDO A AÇÃO DE FUNÇÕES: RESTRIÇÕES

3.1 Exemplo: determinando uma inversa para $y = x^2$

Explore o gráfico de $y = x^2$, buscando responder: *dada a ordenada de um ponto sobre a curva, gráfico de uma função (ou seja, dado o valor b no visor da calculadora), como recuperar o valor da abscissa (ou seja, como recuperar o valor de x)?*

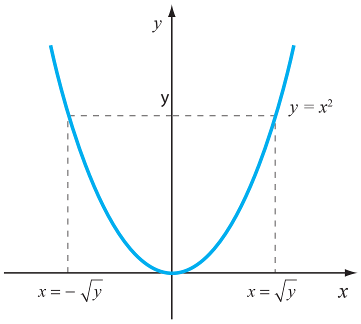


Figura 3 - Resolvendo a equação $y = x^2$, para $x \in IR$

Não é possível, neste caso, responder à pergunta exibindo um valor único para a abscissa do ponto fixado.

Algebricamente, ao resolvermos a equação $y = x^2$ em termos de *x*, ou seja, colocando o *x* em função de *y*, obteríamos dois valores: $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

O símbolo $\sqrt{\ }$, que pode já ser seu conhecido, é lido como "raiz quadrada" e aparece na escrita dos números com o seguinte significado:

3.1.1 Definição

O número $b > 0$ tal que $b^2 = a$ é denominado *raiz quadrada* positiva de *a*, e pode ser escrito como $b = \sqrt{a}$.

O número $b < 0$ tal que $b^2 = a$ é denominado *raiz quadrada* negativa de *a* e pode ser escrito como $b = -\sqrt{a}$.

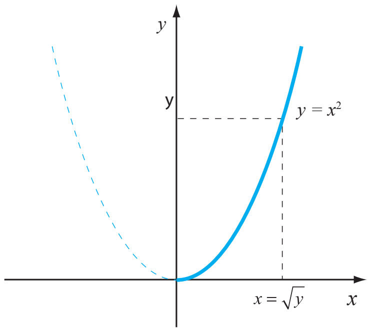


Figura 4 - Gráfico de y=x^2, $x \in [0, +\infty)$

Sabemos que uma regra que a cada valor y associa os dois valores diferentes $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$ não definiria uma função.

Por outro lado, observe o gráfico de $y = x^2$ na Figura 4: se *restringirmos* a função a uma parte de seu domínio, por exemplo, $x \geq 0$, é possível desfazer a ação da função sobre o número x por meio da regra $x = \sqrt{y}$. Essa seria a expressão da *função inversa* de $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$.

Escrevemos $y = \sqrt{x}$, fazendo a troca de nomes do domínio e da imagem.

3.2. Restrições para a definição da inversa: o conceito de função injetiva

Como no caso de $y = x^2$, um dado valor b pode ser imagem de mais de um valor de x no domínio de uma função $y = f(x)$. Isto quer dizer que nem sempre é possível definirmos sua inversa, em seu domínio.

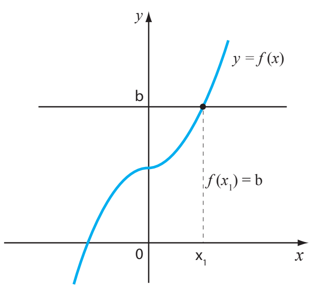


Figura 5 - b é imagem apenas de x_1

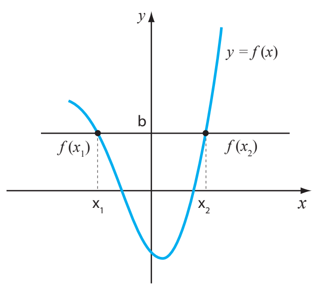


Figura 6 - b é imagem de x_1 e de x_2

Uma estratégia para verificarmos se uma função admite inversa em todo o seu domínio poderá então ser explorar seu gráfico, observando se as retas paralelas ao eixo x, de equação $y = b$, o interceptam no máximo uma vez. Havendo interseção única, o valor de x correspondendo ao valor b na imagem é único!

Neste caso, a função nunca assumiria mais de uma vez um mesmo valor na imagem.

Funções com essa propriedade têm um nome especial – *função injetora* (ou *injetiva*).

3.3 Definição

Uma função $y = f(x)$ definida em um domínio D é denominada *injetora* (ou *injetiva*) quando

$$x_1 \uparrow x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \uparrow f(x_2) \text{ ou equivalentemente,}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \text{, para quaisquer } x_1 \text{ e } x_2 \text{ em } D.$$

3.4 Exemplo: injetividade e existência de funções inversas

Observe os gráficos das funções $y = 2x + 3$ e $y = x^2$ desenhados a seguir.

Na Figura 7, cada reta de equação $y = b$ intercepta a curva em apenas um ponto.

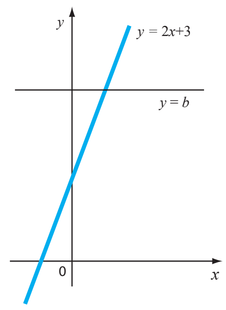


Figura 7 - $y = 2x + 3$ é injetiva

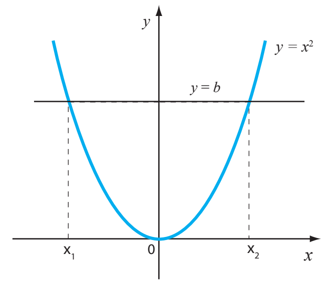


Figura 8 - $y = x^2$ não é injetiva

Sempre há interseção entre o gráfico e a reta $y = b$, para quaisquer valores de b. Isto significa que $y = 2x + 3$ é *injetiva* em seu domínio, que é *IR*.

Algebricamente: se $x_1 \uparrow x_2$, então $2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$ para quaisquer x_1 e x_2 em *IR*. Pela Definição 3.3, $y = 2x + 3$ é injetiva.

Já no caso do gráfico de $y = x^2$ (Figura 8), as retas da forma $y = b$ o interceptam apenas quando $b \geq 0$, e o fazem em dois pontos. Algebricamente, escrevemos: $(x_1)^2 = (x_2)^2$ não implica $x_1 = x_2$. Por exemplo, considere $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

Isto quer dizer que a função $y = x^2$ *não é injetiva* em seu domínio, que é *IR*.

4. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO INVERSA

4.1 Notação e linguagem

É comum denominarmos f^{-1} à *inversa* de *f*. Aqui, vamos usar esta terminologia.[2]

A função f^{-1} atua sobre pontos na imagem de *f*, respondendo à questão: este ponto é imagem de que valor *x*? Assim, a *imagem* da função *f* será o *domínio* da função f^{-1}.

Já o *domínio* da função *f* será a *imagem* da função f^{-1}, porque ao desfazer a ação de *f*, a função f^{-1} age sobre o valor *y* retornando ao valor *x* como antes de ser modificado pela *f*. Após estas observa-

[2] Vale a pena comentar que esta linguagem possui um inconveniente. Para muitos o nome f^{-1} sugere a expressão $\frac{1}{f}$, que não corresponde à inversa da função *f*, como estamos discutindo. Seremos cuidadosos, e quando estivermos nos referindo a $\frac{1}{f}$, usaremos o símbolo $(f)^{-1}$, com os parênteses conforme indicado.

ções, apresentamos uma definição formalizada de *função inversa*.

4.2 Definição

Seja uma função $y = f(x)$ injetora, em seu domínio D, com imagem I. Então sua função *inversa* f^{-1} é uma função que tem domínio I, definida como uma regra que satisfaz

$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$, para todo y em I.

Nomeando y a variável dependente e x a variável independente, escrevemos

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x \text{, para todo } x \text{ em } I.$$

4.3 Exemplo: definindo as inversas $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$

A *inversa* f^{-1} da função $y = f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ pode ser definida como $y = \sqrt{x}$, porque $f^{-1}(y) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$,[3] quando $x \in [0, +\infty)$. Pela Definição 4.2, podemos afirmar: $y = x^2$, definida em $[0, +\infty)$, tem como *inversa* $y = \sqrt{x}$, também definida em $[0, +\infty)$.

[3] Vale comentar que $\sqrt{x^2} = |x|$. Discuta com seus colegas o porquê.

A *inversa* f^{-1} da função $y = f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ pode ser definida como $y = -\sqrt{x}$, porque $f^{-1}(y) = f^{-1}(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x| = x$, quando $x \in (-\infty, 0]$. Pela Definição 4.2, podemos afirmar: $y = x^2$, definida em $(-\infty, 0]$, tem como *inversa* $y = -\sqrt{x}$, com domínio $[0, +\infty)$, que é a imagem de $y = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$.

5. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO INVERSA

Ao compor duas funções *f* e *g* deixamos atuar a ação de uma sobre o resultado da ação da outra. Como a ação de f^{-1} desfaz a ação de *f*, é natural escrevermos que:

5.1 Propriedade

a) $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo x no domínio da *f*.

b) $f(f^{-1}(x)) = x$, para todo x no domínio da f^{-1}.

Essas propriedades são demonstradas a partir da Definição 4.2, como a seguir.

Demonstração

Temos que $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$, (Definição 4.2). Então $f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)$ (pois $f(x)=y$ pela Definição 4.2), o que torna $f^{-1}(f(x))=x$ (pois $f^{-1}(y)=x$ por Definição 4.2). A demonstração do item (b) é análoga.

5.2 Exemplo: composição de funções inversas

Vamos denominar $f^{-1}(x)=(x-3)/2$ à inversa de $f(x)=2x+3$ e compor as duas funções. Podemos escrever:

$f(f^{-1}(x))=2(f^{-1}(x))+3=2((x-3)/2)+3=x$, para todo x no domínio de f^{-1}.

5.3 Relações entre o gráfico de uma função e o de sua inversa

O gráfico de uma função $y=f(x)$ é o conjunto de pares de pontos $(x,f(x))$.

Pela Definição 4.2, $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

Segue que se (a,b) está no gráfico de *f*, então (b,a) está no gráfico de f^{-1}.

A Figura 9 ressalta a relação entre pontos da forma (a,b) e (b,a), no plano cartesiano: eles são simétricos em relação à reta $y=x$.

A Figura 10 ilustra a relação que existirá entre o gráfico de uma função *f* e o de sua *inversa* f^{-1}.

Ele será obtido refletindo o gráfico de *f* em torno da reta $y=x$.

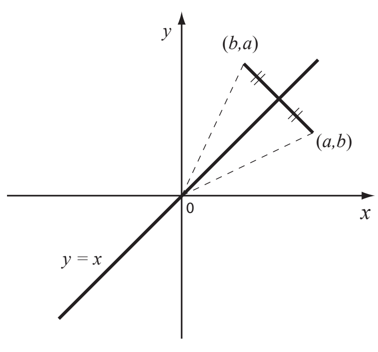


Figura 9 - Simetria em relação à reta $y=x$

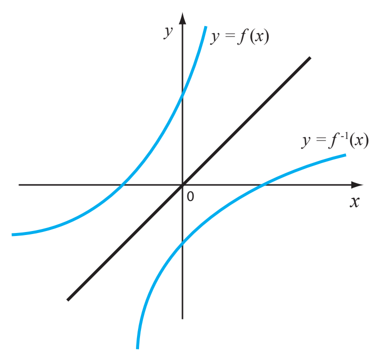


Figura 10 - Relação entre gráficos de *f* e f^{-1}

6. EXEMPLO: POTÊNCIAS RACIONAIS COMO FUNÇÕES INVERSAS

As funções $y = x^2$ e $y = x^3$ constituem bons modelos para o estudo das *funções inversas* de duas classes de funções:

a das funções $y = x^n$, onde n é um número *par*, e o das funções $y = x^n$, onde n é um número *ímpar*.

O caso $y = x^2$ já foi discutido no exemplo 4.3 desta aula. No exemplo 6.1, a seguir, apresentamos a função $y = x^3$ e sua inversa.

6.1 Exemplo: definindo a função inversa $y = \sqrt[3]{x}$

A função $y = x^3$ é uma *função injetiva* em todo seu domínio, que é *IR*. Confirme esse fato, verificando na Figura 11 que retas $y = b$ interceptam o gráfico só uma vez, para todo valor de b.

Pela Definição 4.2, sua *inversa* f^{-1} será dada por $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = x^3$.

Ou seja, a regra f^{-1}, que corresponde à *inversa* da função $y = x^3$, $x \in$ *IR*, associa a qualquer número a em *IR* um valor b, também em *IR*, tal que $b^3 = a$.

6.1.1 Definição

O valor b tal que $b^3 = a$ é denominado *raiz cúbica* de a, e pode ser escrito $b = \sqrt[3]{a}$.

Utilizando essa notação e a noção de função inversa, afirmamos: $y = x^3$ tem como inversa a função $y = \sqrt[3]{x}$, ambas com domínio *IR*.

O gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ está esboçado a seguir e foi obtido refletindo o gráfico de $y = x^3$ em relação à reta $y = x$.

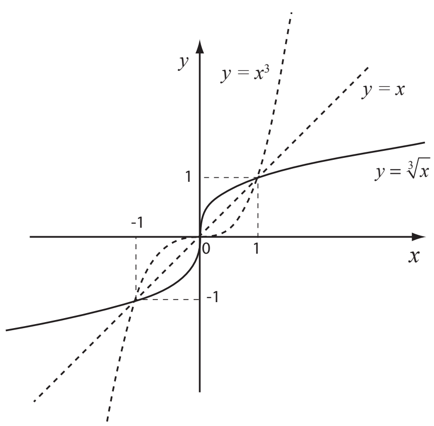


Figura 11 - Gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$

Após estes dois exemplos, discutimos os casos gerais

6.2 A Função $y = \sqrt[n]{x}$, onde n é um número par

Em casos como este, procedemos como no caso de $y = x^2$, restringindo o domínio da função.

6.2.1 Definição

A *inversa* da função $y = x^n$, n número par, restrita ao domínio $[0,+\infty)$, é a função $y = \sqrt[n]{x}$, também definida em $[0,+\infty)$ e satisfazendo $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$.

A inversa da função $y = x^n$, n número par, restrita ao domínio $(-\infty,0]$, é a função $y = -\sqrt[n]{x}$, definida em $[0,+\infty)$, satisfazendo $y = -\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$.

6.3 A Função $y = \sqrt[n]{x}$, quando n é um número ímpar

Para as funções $y = x^n$, quando n é um número ímpar, nenhuma restrição precisa ser feita. Todas são *funções ímpares*, seu gráfico é simétrico em relação à origem. As retas $y = b$ sempre cortam seu gráfico e em um único ponto. Tais funções são injetivas e, pela Definição 4.2, admitem inversa.

6.3.1 Definição

A inversa da função $y = x^n$, onde n é um número ímpar, é a função $y = \sqrt[n]{x}$, definida em *IR*, satisfazendo $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$.

6.4 Notação e linguagem

As *raízes n-ésimas* de um número a – denominação usada para falarmos de $\sqrt[n]{a}$ – são também representadas por $a^{\frac{1}{n}}$.

Uma potência natural de um número a, como a^n, tem um significado também natural: ela expressa o produto do número a por ele mesmo n vezes.

No entanto, esse significado não é possível para expressões tais como, por exemplo, $3^{\frac{1}{3}}$.

É através da noção de Função Inversa que associamos um significado matemático a uma potência racional de um número, considerando $3^{\frac{1}{3}}$ como o número b tal que $b^3 = 3$.

Assumindo como válidas as propriedades de potências naturais, escrevemos, por exemplo,

$$3^{\frac{2}{3}} = (3^{\frac{1}{3}})^2 = 3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{3}}$$

É desse modo que atribuímos um significado matemático a um símbolo como $x^{\frac{p}{q}}$.

6.5 Definição

A *potência* $x^{\frac{p}{q}}$, onde p e q são números naturais e x é um número real, é definida como o produto de p parcelas iguais a $x^{\frac{1}{q}}$ (desde que $x^{\frac{1}{q}}$ exista).

As propriedades já conhecidas para potências inteiras de números reais serão estendidas às operações com os novos símbolos introduzidos na Notação 6.4. Para recordá-las, consulte um texto do Ensino Médio relativo ao tema Potências.

EXERCÍCIOS

1 - Restrinja convenientemente o domínio da função $y = x^6$ e defina sua inversa. Esboce o gráfico de $y = x^6$, bem como o de sua inversa.

2 - Para a função $y = x^5$, defina sua inversa e esboce seu gráfico.

3 - Uma discussão análoga à do exemplo para $y = x^2$, com $x \in [0, +\infty)$, pode ser feita considerando a restrição da função $y = x^2$, a $x \in (-\infty, 0]$.

Esboce um gráfico representando essa nova função, identificando e discutindo a regra que desmancha sua ação sobre um número negativo *x*.

De modo análogo ao exemplo 4.3, podemos mostrar que $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo *x* no domínio de *f*. Verifique você agora essa afirmação!

4 - Utilizando o procedimento acima, esboce os gráficos das inversas de:

(a) $f(x) = 2x + 3$

(b) $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$

REFERÊNCIA

PINTO, M.; ARAUJO, J. FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

AULA 6

Funções Exponenciais

Objetivos

- Definir *Funções Exponenciais,* a partir de situações que elas modelam.
- Estudar algumas de suas propriedades básicas.
- Apresentar os conceitos de *meia-vida* e tempo de *duplicação.*

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos estudar uma função que não se constrói a partir das que já estudamos, chamada *Função Exponencial*. Ela é definida por expressões como $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo, diferente de 1.

Funções exponenciais surgem na modelagem de inúmeros problemas, em circuitos elétricos, reações químicas, desintegração radioativa, crescimento de populações e outros. Aqui, vamos obter sua expressão algébrica e esboçar seu gráfico, a partir de informações em conjuntos de dados. Vamos aprender a identificá-las quando representadas por expressões algébricas, gráficos e tabelas e estabelecer relações entre exponenciais em diferentes bases.

Iniciamos a aula com dois exemplos, que são característicos do caso geral.

2. EXEMPLO: CRESCIMENTO POPULACIONAL

A Tabela 1 registra o crescimento da população brasileira, no período de 1997 a 2002.

Que fórmula ou fórmulas algébricas se adequariam para expressar a relação entre o número de habitantes e o tempo transcorrido a partir de 1997, nessa tabela?

2.1 Buscando regularidades em um conjunto de dados

Ao calcularmos a *variação* anual da população, como na aula sobre funções lineares, vemos que a *taxa de variação anual* da população não é constante, no período considerado, de 1997 a 2002.[1] Isto quer dizer que os dados não correspondem à situação "ideal" a que o modelo linear se "ajusta" para representar o fenômeno. O cálculo da variação anual da população está registrado na terceira coluna da Tabela 1.

[1] Este fato não é uma propriedade apenas deste conjunto de dados, mas sim é característico da modelagem do crescimento de populações. Em condições normais, as populações crescem mais rapidamente (ou seja, têm maior variação) quando ficam maiores, porque o número de pessoas que têm filhos aumenta. Essa é uma justificativa para o aumento dos números que aparecem na terceira coluna da tabela. Na verdade, os dados que apresentamos nesta tabela são insuficientes para justificar a escolha de uma função diferente da linear para melhor descrever o fenômeno. Mesmo assim, vamos utilizá-los para ilustrar a discussão.

Tabela 1

Dados extraídos da planilha "Estimativas_e_taxas_1980-2012_Universo.xls"

Ano	*População (milhões)*	Variação da população (milhões)	Variação percentual da população (milhões)
1997	163,47	---	
1998	165,68	165,69-163,47=2,22	$\frac{165,69-163,47}{163,47}=0,0136$
1999	167,91	167,91-165,69=2,22	$\frac{167,91-165,69}{165,69}=0,0134$
2000	170,14	170,14-167,91=2,23	$\frac{170,14-167,91}{167,91}=0,0133$
2001	172,38	172,38-170,14=2,24	$\frac{172,38-170,14}{170,14}=0,0132$
2002	174,63	174,63-172,38=2,25	$\frac{174,63-172,38}{172,38}=0,0131$

Fonte: IBGE/DPE/Departamento de População e Indicadores Sociais. Gerência de Estudos e Análises da Dinâmica Demográfica. Disponível em: < http://www.ibge.gov.br.>.

Uma alternativa pode ser calcular a variação *percentual* da população, ano a ano. Isto porque *variações* bastante diferentes resultam de *taxas* ou *variações percentuais* iguais ou bem próximas. Por exemplo, uma variação percentual de 2% em 100 habitantes corresponde a uma variação de 2 habitantes. Esses mesmos 2% corresponderiam a uma variação de 20 habitantes, caso a população fosse de 1.000 habitantes.

O cálculo das *variações percentuais* pode ser feita na Tabela 1, como a seguir:

no período de 1997 a 1998, a população do Brasil teve um crescimento ou *variação* de:

População de 1998 – População de 1997 = 2,22 milhões de pessoas.

A *taxa* ou *variação percentual* da população nesse período refere-se à *percentagem da população de 1997 a que este valor, 2,22 milhões, corresponde*. Para isso, calculamos

$$\frac{população1998 - população1997}{população1997} = \frac{165,69 - 163,47}{163,47} = \frac{2,22}{163,47} = 0,0136,$$

ou seja, a variação da população no ano de 1998 é de aproximadamente $0,0136 \times 163,47 = \frac{1,36}{100} \times 163,47$, ou seja, 1,36% de 163,47 milhões.

Cálculos semelhantes para os demais anos estão na quarta coluna da Tabela 1.

Vamos fixar 0,013 como a *taxa ou variação percentual* de crescimento no período.[2]

Feita essa escolha, temos a seguinte evolução do crescimento populacional:

População de 1998 = (População de 1997) + 0,013 (População de 1997)= 1,013 (População de 1997)

População de 1999 = (População de 1998) + 0,013(População de 1998)= 1,013 (População de 1998)

População de 2000= (População de 1999) + 0,013 (População de 1999)= 1,013 (População de 1999)

e assim por diante.

Observe uma outra regularidade no conjunto de dados da Tabela 1, prestando atenção no primeiro e no último membro das igualdades no quadro destacado acima:

$$\frac{população \quad em \quad um \quad ano}{população \quad ano \quad anterior} = 1,013$$

A regularidade na Tabela 1 também pode ser expressa assim: explicitando um *fator* – neste caso, 1,013. Para obtermos a população de um ano, multiplicamos a do ano anterior por esse *fator*.

2.2 Reescrevendo a questão para resolvê-la

A escolha de 0,013 como a *taxa* percentual de crescimento anual da população permite uma reescrita da nossa questão, como a seguir:

A taxa percentual anual de crescimento da população brasileira em um dado período a partir de 1997 é de 1,3%, ou seja, 0,013. Escreva uma fórmula algébrica para a população, sabendo que a população de 1997 era de 163,47 milhões de habitantes.

Para tornar concisa a redação, chamamos a variável tempo (em anos) de t, e a população brasileira (em milhões de habitantes) de $P(t)$. Da discussão anterior, à *taxa* 0,013 corresponde o *fator* 1,013, que utilizaremos para multiplicar a população de um ano para obter a do ano seguinte.

[2] Observe que os valores encontrados para os percentuais de crescimento da população também não são constantes. Aparentemente, considerá-los constantes seria tão inadequado quanto modelarmos o fenômeno utilizando uma função linear. No entanto, no caso do modelo linear, o erro que cometeríamos ao considerarmos constante a variação da população (verificar terceira coluna da tabela 1) é da ordem de 0,01 milhões de pessoas (10.000 pessoas). Já ao considerarmos o percentual de crescimento como sendo, por exemplo, 0,013, nosso erro seria no máximo da ordem de 0,0005 milhões de pessoas (500 pessoas).

O valor $t = 0$ corresponderá ao ano de 1997, ou $P(0) = 163,47$ é a população de 1997. Nessa notação, em que t é o número de anos após 1997, temos:

$t = 1$ corresponde à população de 1998 e então
$P(1) = 165,69 = P(0)(1,013) = 163,47(1,013)$;

$t = 2$ corresponde à população de 1999 e então
$P(2) = 167,91 = P(1)(1,013) = 163,47(1,013)^2$;

$t = 3$ corresponde à população de 2000 e então

$P(3) = 170,14 = P(2)(1,013) = 163,47(1,013)^2.(1,013) =$
$163,47(1,013)^3$.

Prosseguindo assim, confirme que $P(4)= 163,47\ (1,013)^4$ e $P(5) = 163,47\ (1,013)^5$.

O padrão acima[3] pode ser generalizado: t anos após 1997 a população será

$$P(t)= P_0\ (1,013)^t,$$

em que t é um número natural e P_0 denota a população em 1997, ou seja, vale $P(0)$.

Essa é uma expressão algébrica para representar o conjunto de dados na Tabela 1.

2.3 Notação e linguagem

Em nosso exemplo, a população em cada ano é obtida multiplicando a população do ano anterior por um mesmo *fator*, que é $a = 1,013$.

Esse fator a tem um nome especial – *fator de crescimento*.

Tal *fator de crescimento* corresponde a uma *taxa* r anual de 1,3%, ou 0,013. Esta taxa percentual r é denominada *taxa de crescimento*.

Veja que *fator de crescimento* = 1 + *taxa de crescimento*, ou seja, $a = 1 + r$.

A função $P(t) = P_0(1,013)^t$ é denominada *função exponencial* de base $a = 1,013$.[4]

2.4 O gráfico de $P(t) = P_0(1,013)^t$, definida em IR

A população $P(t) = P_0(1,013)^t$ é crescente e ficará muito grande com o passar de muitos anos, ou seja, quando t fica muito grande.[5]

[3] Veja que o desenvolvimento corresponde a uma progressão geométrica de razão 1,013 e termo inicial $P(0) = 163,47$

[4] Supondo que o crescimento da população se mantém à taxa de crescimento $r = 0,013$, podemos fazer projeções para o valor da população anos antes de 1997 e anos após 1997.

[5] Quando x fica muito grande, um valor $f(x) = a^x$, $a > 1$, que corresponde a elevar à potência x um número $a > 1$, fica também muito grande. Retomando o significado da base $a = 1,013$ como fator de crescimento da população, é natural concluirmos que a população cresce, à medida que o tempo passa.

Veja também que quando *t* cresce, o crescimento de $P(t)=P_0(1{,}013)^t$ fica cada vez mais acentuado, mais rápido. Esse fato se confirma na Tabela 1: observe, na terceira coluna, que os valores de $\varnothing P$, em intervalos regulares de tempo, ficam maiores com o passar do tempo. Isto significa que a *taxa de variação* $\dfrac{\varnothing P}{\varnothing t}$ dessa função é *crescente*.

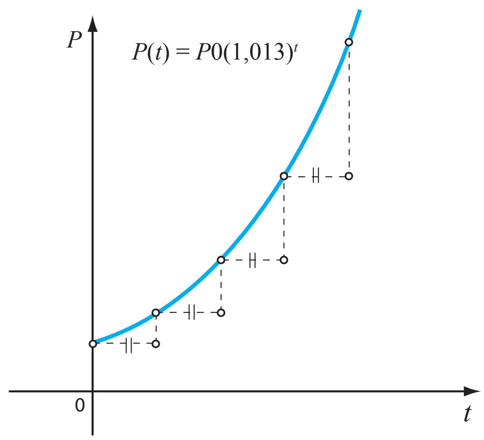


Figura 1 - Gráfico da função $P(t)=P_0(1{,}013)^t$, para valores de *t* positivos[6]

Veja o que acontece com os valores de $P(t)=P_0(1{,}013)^t$ para *t* no intervalo $(-\infty,0]$.[7] Um expoente *t*, negativo, numa potência de $a=1{,}013$, representa o valor $a^t=\dfrac{1}{a^{|t|}}$. O denominador dessa última expressão cresce muito quando o valor absoluto de *t* crescer (porque $a=1{,}013$ é maior que 1). Assim, o valor de $a^t=\dfrac{1}{a^{|t|}}$ vai diminuir, ficando muito próximo de zero (mas nunca sendo nulo).[8]

O gráfico de $P(t)=P_0(1{,}013)^t$, com $t\in IR$, tem seu esboço como na figura a seguir.

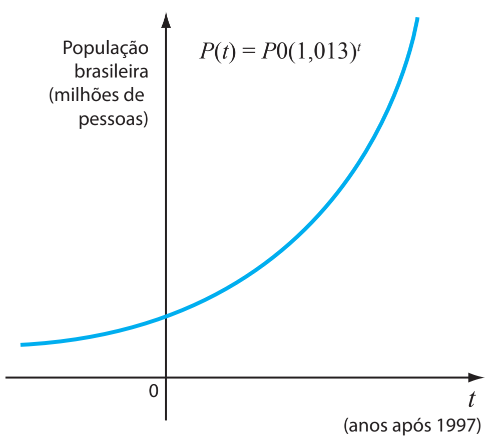


Figura 2 - Gráfico de $P(t)=P_0(1{,}013)^t$, $t\in IR$

[6] Há vários modos de estudarmos os fenômenos da realidade. Utilizando a modelagem matemática, somos capazes de explorá-los sob um ponto de vista quantitativo. Na modelagem, construímos representações matemáticas, tais como funções, que devem ser entendidas como aproximações para o fenômeno em sua complexidade. Por exemplo, no caso em estudo, não faz sentido nos referirmos a um número fracionário $P(t)$ de pessoas. Apesar disso, esboçamos o gráfico de contínuo – "sem tirar o lápis do papel" – o que significa termos considerado valores de $P(t)$ em $[0,+\infty)$. Um gráfico mais apropriado para uma função crescimento populacional deveria apresentar descontinuidades – ou "saltos" – já que sua imagem $P(t)$ só assume valores inteiros. No entanto, a representação que propusemos é satisfatória: como os valores da função estão na casa dos milhões, os espaços provocados pelos saltos correspondentes a uma unidade se tornam invisíveis na escala utilizada. Mesmo assim, a curva desenhada "sem tirar o lápis do papel" representa apenas uma aproximação para o crescimento da população.

[7] O significado aqui seria o de modelar o crescimento populacional em anos anteriores a 1997, supondo que o mesmo fator de crescimento se mantenha.

[8] Observe que, desta vez, esta representação faz todo o sentido em termos do que ela está modelando: a população se inicia com alguns de seus membros; não haveria início de crescimento a partir de zero habitantes.

3. EXEMPLO: ELIMINAÇÃO DA NICOTINA NO SANGUE

Quando fumamos um cigarro, a nicotina entra na corrente sanguínea, é metabolizada e eliminada a uma taxa (estimada) de 30% a cada hora. Os cigarros comuns contêm, aproximadamente, 0,4 *mg* de nicotina. A função $q(t)$, que modela a quantidade de nicotina em nosso sangue que é eliminada *t* horas depois que fumamos, pode ser expressa como a seguir:

Em $t = 0$, a quantidade de nicotina no corpo é $q = 0,4$; ou seja, $q(0) = 0,4$.[9]

[9] Vamos supor que toda a nicotina foi para o nosso corpo.

Da informação sobre o metabolismo da nicotina, passada 1 hora, 30% de sua quantidade inicial será eliminada.

Restará, portanto, 70% de 0,4 *mg* de nicotina, ou seja,

$$q(1) = q(0).\frac{70}{100} = 0,4(0,7)$$

.

Supondo que a taxa de eliminação se mantenha, passada mais 1 hora, 30% da quantidade $q(1)$ de nicotina será novamente eliminada. Restará, portanto, 70% de $q(1) = 0,4(0,7)$, ou seja,

$$q(2) = q(1).(0,7) = 0,4(0,7).(0,7) = 0,4(0,7)^2.$$

$q(3) = q(2).(0,7) = 0,4(0,7)^2.(0,7) = 0,4(0,7)^3$, e assim por diante.

Após t horas, $q(t) = 0,4(0,7)^t$,[10] representando a quantidade que resta de nicotina no sangue, que está sendo eliminada a uma *taxa* de decaimento $r = 0,3$.

[10] Use uma calculadora e confirme que $0,4(0,7)^t$ decresce, quando *t* cresce.

Veja que aqui analisamos uma situação em que a função *q(t)*, modelando o fenômeno, é decrescente, ao invés de crescente. O *fator* de decaimento $a = 0,7$, que é a base de nossa exponencial, se escreve como $a = 1 - 0,3$. Observe que:

Fator de decaimento=1 – *taxa* de decaimento

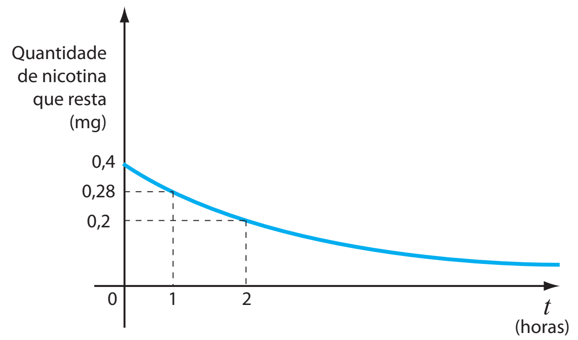


Figura 3 - Gráfico da função $q(t) = 0,4(0,7)^t$

4. A FUNÇÃO EXPONENCIAL $y = ka^x$, ONDE $a > 0$, $a \neq 1$

4.1 Definição

Uma relação entre variáveis expressa na forma $y = f(x) = ka^x$ é denominada *função exponencial* de x com base a, em que a e k são números reais e $a > 0$, $a \neq 1$. O domínio dessa função é *IR*.[11]

A discussão para $y = f(x) = ka^x$, onde $a>1$ e $k>0$, assemelha-se à do exemplo 2; e para $0 < a < 1$ e $k>0$, à do exemplo 3.[12]

Os gráficos desenhados a seguir representam as duas situações:

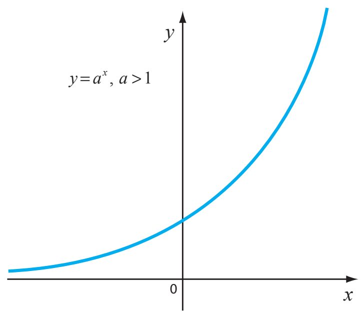


Figura 4 - Gráfico de $y = a^x$, $a > 1$

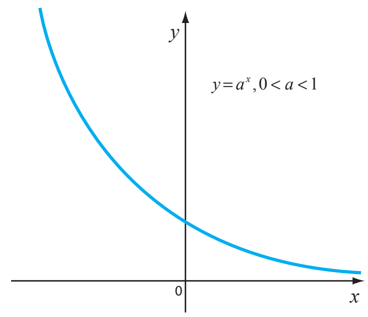


Figura 5 - Gráfico de $y = a^x, 0 < a < 1$

Interpretando a base a como um *fator* de crescimento ou decaimento, confirme que:

- valores grandes de a em $y = f(x) = a^x$ modelam crescimentos rápidos.
- valores de a próximos de 0 em $y = f(x) = a^x$ modelam decaimentos rápidos.

Os gráficos desenhados a seguir dão uma ideia desses significados.

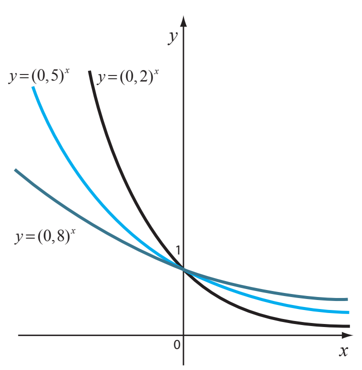


Figura 6 - Gráficos de $y = a^x, 0 < a < 1$

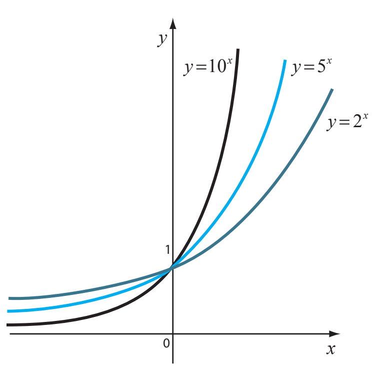


Figura 7 - Gráficos de $y = a^x, a > 1$

[11] Vale a pena ser feito um comentário sobre o domínio de expressões como $y = f(x) = ka^x$, antes de defini-lo. Observe que em nosso primeiro exemplo os dados referiam-se a valores anuais da população, enquanto o gráfico contínuo, esboçado sem tirar o lápis do papel, considerou valores da população em quaisquer instantes. Desse modo, o domínio da função representada no gráfico, ao invés dos naturais *IN*, foi o conjunto *IR* dos números reais. Sair de modelos discretos, em que os dados correspondem a valores em *IN*, e passar para o modelo contínuo requer a definição de função potência para valores "intermediários" de x. A Aula 5 nos tornou capazes de considerar potências racionais de um número. Não discutimos ainda o significado de potências irracionais e nem seremos capazes de levar esta discussão aqui. Adiantamos que estas últimas são definidas através das aproximações racionais dos números irracionais.

[12] Tais funções são definidas com valores $a > 0$ e $a \neq 1$, para sua base. Valores negativos para a base poderiam resultar em funções com domínio bem complexo. Por exemplo, como já vimos, raízes n-ésimas de um número negativo não existem quando n é par. No caso de $a = 1$, as funções seriam constantes.

O *crescimento exponencial* é muitas vezes dado por meio de sua *taxa de crescimento r*. Como em nosso primeiro exemplo, o *fator de crescimento* será $a = 1 + r$, e a função que modela o fenômeno será $y = f(x) = a^x$.

Numa situação de *decaimento*, como a do segundo exemplo, o *fator de decaimento* será $a = 1 - r$, onde r é a taxa de decaimento. Esse valor a corresponderá à base da exponencial que modela o fenômeno.

4.2 Exemplo: ajuste de expressões exponenciais a um conjunto de dados

Aqui vamos relacionar os dados $h(s)$, $f(s)$, $g(s)$, cujos valores estão na tabela a seguir, com as seguintes fórmulas: $y = a(1,1)^x$, $y = b(1,05)^x$, $y = c(1,03)^x$. Estamos supondo que a, b e c são constantes e buscando o melhor ajuste entre dados e expressões algébricas. Note que os valores foram arredondados em duas casas decimais.

s	$h(s)$	s	$f(s)$	s	$g(s)$
2	1,06	1	2,20	3	3,47
3	1,09	2	2,42	4	3,65
4	1,13	3	2,66	5	3,83
5	1,16	4	2,93	6	4,02
6	1,19	5	3,22	7	4,22

Iniciamos com os dados na coluna $h(s)$, calculando as razões:

$$\frac{h(3)}{h(2)} = \frac{1,09}{1,06} = 1,0283, \quad \frac{h(4)}{h(3)} = \frac{1,13}{1,09} = 1,0366,$$

$$\frac{h(5)}{h(4)} = \frac{1,16}{1,13} = 1,0265, \quad \frac{h(6)}{h(5)} = \frac{1,19}{1,16} = 1,0258.$$

Dentre as três fórmulas apresentadas a que melhor irá ajustar o conjunto de dados na coluna $h(s)$ será $y = c(1,03)^x$. Para tomar esta decisão, arredondamos os valores das razões em duas casas decimais como 1,03 e consideramos que:

$$\frac{h(3)}{h(2)} \approx \frac{h(4)}{h(3)} \approx \frac{h(5)}{h(4)} \approx \frac{h(6)}{h(5)} \approx 1,03$$

Com esta proposta, escrevemos;

$h(3) = 1,03h(2);;$

$h(4) = 1,03h(3) = (1,03)^2 h(2);$

$h(5) = (1,03)h(4) = (1,03)^3 h(2);$

e finalmente $h(6) = (1,03)h(5) = (1,03)^4 h(2)$.

Observe os expoentes do fator 1,03 e confirme que as expressões que obtivemos se escrevem como: $h(s)=(1,03)^{s-2}\,h(2)$, para os valores de s. Propriedades de potências e o fato de que $h(2)=1,06$, permitem escrever: $h(s)=\dfrac{h(2)}{(1,03)^2}(1,03)^s=\dfrac{1,06}{(1,03)^2}(1,03)^s$.

Agora use uma calculadora e verifique que a função $y=c(1,03)^x$, com $c=1$, ajusta-se bem ao conjunto de dados $h(s)$, se comparada às duas outras opções.

A discussão das duas outras colunas de dados agora é com você!

5. CLASSES DE FUNÇÕES E REGULARIDADES EM TABELAS DE DADOS

Como reconhecer se uma tabela de valores x e y provém de uma *função linear*? Ou de uma *função exponencial*?

Funções lineares caracterizam-se pelo fato de sua *taxa de variação* ser constante. Dados em uma tabela corresponderiam a valores de uma função linear $y=f(x)$, caso a *taxa de variação* $\dfrac{\varnothing y}{\varnothing x}$ permanecesse sempre constante.

Para as *exponenciais* $y=f(x)=ka^x$, as *razões* entre valores de y correspondentes a valores igualmente espaçados de x devem permanecer constantes.

Vale observar que as propriedades de potencias são todas válidas para as exponenciais.

5.1 Exemplo: explorando tabelas de dados

Cada uma das tabelas de valores a seguir pode corresponder a valores de uma função linear, uma função exponencial, ou nenhuma dessas duas. Decida sobre a classe de funções que podem estar aí representadas.

Quando possível, ache uma fórmula para a função.

x	$f(x)$
0	21
1	25,4
2	37,8
3	73,4

x	$g(x)$
–1	25,1
0	15,06
1	9,036
2	5,4216

x	$h(x)$
0	27
2	24
4	21
6	18

a) Para a função $y = f(x)$, temos

$f(1) - f(0) = 25,4 - 21 = 4,4$

$f(2) - f(1) = 37,8 - 25,4 = 12,4$, o que já significa que ela não é linear, pois a variação Δf, correspondente a uma variação em x com mesmo espaçamento, não é constante.

Verificando então a possibilidade dos dados serem valores de uma exponencial, calculamos:

$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{25,4}{21} = 1,2$; $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{37,8}{25,4} = 1,4$, o que também significa que $y = f(x)$ também não é uma exponencial.

b) Para a função $y = g(x)$, temos

$g(0) - g(-1) = 15,06 - 25,1 = -9,04$

$g(1) - g(0) = 9,036 - 15,06 = -6,024$, o que já significa que ela não é linear, pois a variação Δg correspondente a um mesmo espaçamento em x não é constante.

Verificando então a possibilidade de os dados representarem uma exponencial, calculamos:

$$\frac{g(0)}{g(-1)} = \frac{15,06}{25,1} = 0,6; \quad \frac{g(1)}{g(0)} = \frac{9,036}{15,06} = 0,6; \quad \frac{g(2)}{g(1)} = \frac{5,4216}{9,036} = 0,6,$$

o que significa que $y = g(x)$ pode ser uma exponencial, de base $a = 0,6$. Sua expressão algébrica é $y = g(x) = g(0)a^x$, que então se escreve $y = 15,06(0,6)^x$.

c) Para a função $y = h(x)$, temos

$h(2) - h(0) = 24 - 27 = -3$; $h(4) - h(2) = 21 - 24 = -3$;

$h(6) - h(4) = 18 - 21 = -3$.

Veja que a variação da função foi constante para valores de x com o mesmo espaçamento. Então a função $y = h(x)$ pode corresponder a uma função linear. Uma expressão algébrica para $y = h(x)$ pode ser $\frac{y - 27}{x - 0} = -3$, ou seja, $y = -3x + 27$.

6. O NÚMERO *e*

O número irracional e=2,7182 é tão usado como base das exponenciais que as calculadoras contêm um botão e^x. Motivos de tal preferência não serão discutidos aqui, mas valem uma pesquisa!

Nesta aula, queremos apenas chamar sua atenção para o fato de que seu estudo e seu gráfico são análogos aos anteriores e que qualquer outra função exponencial da forma $y = f(x) = ka^x$ pode ser escrita na base e, ou em qualquer outra base.

Veja o gráfico da função $y = e^x$, na Figura 8. Como mencionamos, desenhamos gráficos de exponenciais sem tirar o lápis do papel. Isto quer dizer que, dado qualquer valor $y = a$, onde $a > 0$, existe um valor, digamos, m, tal que $e^m = a$.

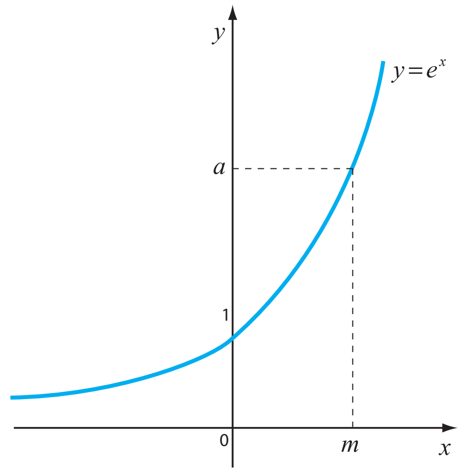


Figura 8 - A exponencial de base *e*

Substituindo esse valor $e^m = a$ na expressão $y = f(x) = ka^x$, podemos escrever[13]

$$y = f(x) = ka^x = k(e^m)^x = ke^{mx}$$

O destaque acima traduz uma função exponencial de base a qualquer em termos de uma função exponencial de base e.

Assim, para estudarmos as funções $y = ka^x$, não é necessário esgotarmos milhares de valores para a base a. Basta, por exemplo, estudarmos as expressões $y = ke^{mx}$.

Esse é um dos motivos de nossa calculadora trabalhar com a expressão de uma única exponencial; no caso, a expressão e^x.

[13] Entre a terceira e a quarta igualdade, utilizamos propriedades de potências, que são também válidas quando operamos com exponenciais.

6.1 Exemplo: decaimento radioativo e meia-vida

Experimentos em laboratórios indicam que alguns átomos emitem parte de sua massa na forma de radiação. Com sua massa menor, constituem outro elemento não radioativo. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui e, consequentemente, a massa da nova substância não radioativa aumenta. Esse processo é denominado *decaimento radioativo*.

Se M_0 denota a massa inicial (instante $t = 0$) de uma substância radioativa, então a massa que resta em qualquer tempo t posterior será dada por

$$M(t) = M_0 e^{-rt}, \ r > 0,$$

e o número r é chamado de *taxa de desintegração* da substância.[14]

Por exemplo, o carbono-14, ou radiocarbono, indicado por C^{14}, se desintegra para o nitrogênio 14, N^{14}, e a sua *taxa de decaimento*, determinada experimentalmente, é de aproximadamente $r = 1{,}2 \times 10^{-4}$, quando t é medido em anos.

Temos então que

$$M(1000) = M_0 e^{-1000r} = M_0 e^{-1{,}2\times10^{-4}\times1000} = M_0 e^{-0{,}12} = 0{,}8869 M_0$$
$$M(5000) = M_0 e^{-5000r} = M_0 e^{-1{,}2\times10^{-4}\times5000} = M_0 e^{-0{,}6} = 0{,}5488 M_0.$$

Usualmente, a taxa de desintegração de uma substância é dada em termos de sua *meia-vida*, isto é, o tempo necessário para que a metade dos núcleos, presentes originalmente na amostra, sofram decaimento. Para determinar a *meia-vida* do carbono, vamos denotar a quantidade inicial de massa de uma amostra por M_0 e o tempo necessário para que essa amostra fique reduzida à metade por T, ou seja, $M(T) = \frac{1}{2} M_0$.

Logo, $M_0 e^{-rT} = \frac{1}{2} M_0 \Rightarrow e^{-rT} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{rT} = 2$.

Como determinar o valor de T, numa relação como essa? Podemos fazê-lo por tentativa e erro ou usar uma calculadora, caso soubéssemos o valor de r. No momento, faltam-nos instrumentos capazes de escrever o valor de T de modo explícito, a partir de uma equação como essa.

A resolução de equações como $e^{rT} = 2$ é um dos objetivos de nossa próxima aula.

[14] É importante mencionarmos que ao modelarmos um fenômeno utilizando a exponencial $y = ke^{rx}$, o número r passa a ser denominado taxa contínua de crescimento ou decrescimento. Procure informar-se sobre esta questão.

EXERCÍCIOS

1. A partir dos gráficos nas figuras 4 e 5, construa os gráficos de $y = ka^x$, discutindo o que acontece quando consideramos valores diferentes para k. Organize sua resposta em dois itens, correspondentes a valores de $k > 0$ e valores de $k < 0$.

2. Um dos contaminantes principais de um acidente nuclear, tal como o de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa de, aproximadamente, 2,5 % ao ano.

a) Escreva a expressão da função que descreve o decaimento nesse caso. Para isso, denomine por k_0 a quantidade de estrôncio presente no início do acidente.

b) Considerando que ao tempo t=0 há 100% do contaminante presente, escreva a porcentagem de estrôncio-90 restante, P, em função de anos t, desde o acidente nuclear.

c) Esboce o gráfico de $P(t)$.

3. Quais das seguintes tabelas corresponderiam a uma função linear? Quais corresponderiam a uma função exponencial? Ou a nenhuma delas?[15]

x	$f(x)$
0	10,5
1	12,7
2	18,9
3	36,7

t	$f(t)$
–1	50,2
0	30,12
1	18,07
2	10,8432

u	$h(x)$
0	27
2	24
4	21
6	18

[15] HUGHES-HALLETT, D. *et al. Cálculo e aplicações*, Exercício 13, p. 36.

REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

IBGE/DPE - Departamento de População e Indicadores Sociais. Gerência de Estudos e Análises da Dinâmica Demográfica. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 2 maio 2006.

AULA 7

Função Logarítmica

Objetivos

- Definir *Função Logarítmica*, discutindo propriedades, relações entre as diversas bases e gráfico.
- Utilizar a nova função para resolver equações.

1. INTRODUÇÃO

A aula sobre Funções Exponenciais deixou, ao seu final, a equação $e^{rt} = 2$ para ser resolvida. Para encontrar sua solução, é preciso definir uma função que desmancha a ação da função exponencial, sendo sua inversa, chamada *Função Logarítmica*.

Nesta aula, vamos definir essa nova função, discutir suas propriedades, seu gráfico e relações entre suas possíveis representações e bases. Iniciamos com um exemplo, resolvendo a equação envolvendo exponenciais.

2. EXEMPLO: RESOLVENDO A EQUAÇÃO $e^x = 2$

O gráfico da função $y = e^x$ está esboçado na Figura 1 e nos sugere que existe um valor de *x*, tal que $e^x = 2$.

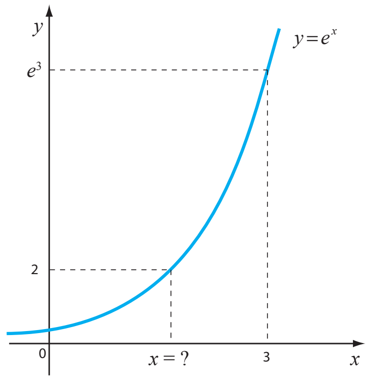


Figura 1 - Resolvendo a equação $e^x = 2$

Numericamente, verificamos que $0 < x < 1$, pois $2 < e < 3$ e então $e^0 < 2 < e^1$.

Damos o nome $\log_e 2$ a esse valor de x (tal que $e^x = 2$). Em outras palavras,

> $x = \log_e 2$ é a potência que se deve elevar o número e para
>
> obtermos o valor 2.

Veja na figura a seguir que é possível determinar o valor de x, tal que $e^x = b$ sempre que $b > 0$, resolvendo esta equação envolvendo uma exponencial. Esse valor de x será positivo caso $b > 1$; será negativo caso $0 < b < 1$ e será 0 caso $b = 1$.

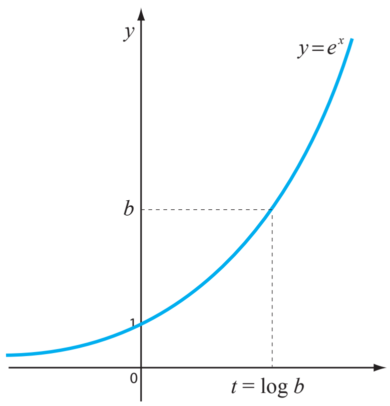


Figura 2- Resolvendo graficamente $e^x = b$

O valor de x, tal que $e^x = b$, é denotado por $x = \log_e b$ ou, alternativamente, por $x = \ln b$. Ele é denominado *logaritmo natural* de b.

Ou seja,

> **2.1 Definição**
>
> $x = \log_e b$ é a potência a que se deve elevar o número e para se obter o valor b.
>
> Em linguagem matemática
> $x = \log_e b \Leftrightarrow e^x = b$

3. A INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL $y = e^x$ [1]

O processo de resolver a equação $e^x = b$ corresponde, na verdade, ao de determinar a inversa de $y = e^x$. Tal inversa pode ser definida porque $y = e^x$ é injetiva em IR.[2]

[1] Como observamos na aula sobre funções exponenciais, o uso da base e é muito difundido. Desse modo, sua inversa $y = \ln x$ terá um papel central dentre o grupo de funções estudadas nesta aula. Numa calculadora científica, temos o comando LN, que corresponde a esta função. Por isso, muitas vezes vamos resolver as equações utilizando a função logaritmo natural.

[2] Observe, em seu gráfico na Figura 1, que retas de equação $y = b$, onde b é um número real, o interceptam quando $b > 0$, e no máximo uma vez.

Veja o esboço do gráfico da inversa de $y = e^x$, obtido ao refletir seu próprio gráfico em torno da reta $y = x$.

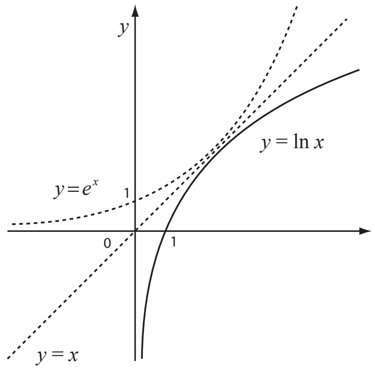


Figura 3 - A função inversa de $y = e^x$ chamada *função logaritmo natural* $y = \ln x$

4. A INVERSA DA EXPONENCIAL GERAL $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

A discussão sobre a inversa de $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ é semelhante à da inversa de $y = e^x$.

Primeiro, veja na Figura 3 que retas de equação $y = b$, onde b é um número real, interceptam a função $y = e^x$ quando $b > 0$, e no máximo uma vez.

Isto significa que a função $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ é injetiva. Retome a Aula 4 e confirme que então podemos definir sua inversa, cujo domínio é *IR* e imagem *IR*+.

4.1 Definição

O nome da inversa de $y = a^x$ é $y = \log_a x$, $(a > 0, a \neq 1)$, que denominamos logaritmo de *x* na base *a*.
Em linguagem matemática,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Nas figuras 4 e 5 a seguir, temos o gráfico de $y = \log_a x$, obtidos como na Aula 4.

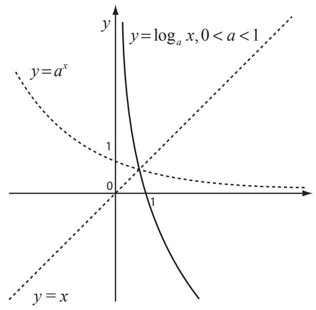


Figura 4 - Gráfico da função $y = \log_a x$, $0 < a < 1$, chamada *logaritmo de x na base a*

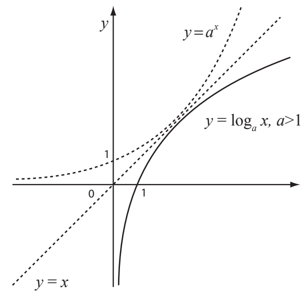


Figura 5 - Gráfico da função $y = \log_a x$, $a > 1$

Informações importantes podem ser obtidas a partir do gráfico de uma função. Na seção a seguir, vamos explorar o gráfico de $y = \log_a x$, $(a > 0, a \neq 1)$.

4.2 Explorando o gráfico de $y = \log_a x$, $(a > 0, a \neq 1)$

Observe que todos os gráficos interceptam o eixo x no valor 1. Isto significa que o valor da função no ponto $x = 1$ é 0. Ou seja, $\log_a 1 = 0$, qualquer que seja o valor $a > 0$.

Veja que gráficos das *funções logarítmicas* nunca interceptam o eixo y. No entanto, as curvas gráfico se aproximam desse eixo, à medida que o valor de x fica muito pequeno. Quando x fica próximo do $x = 0$, ainda que positivo, o valor da ordenada y fica:

- muito grande em valor absoluto, mas negativo, no caso da base $a > 1$;
- muito grande, positivo, no caso de $0 < a < 1$.

Quando o valor de x fica muito grande, veja que:

- o valor da ordenada y fica muito grande e positivo, no caso da base $a > 1$;
- o valor da ordenada y fica muito grande (em valor absoluto), sempre negativo, no caso da base $0 < a < 1$.

Observe agora o gráfico de $y = \log_a x$, com $a > 1$. Ela é *côncava para baixo*. O que estaria provocando esse efeito visual? Ele resulta do fato de que as variações $\varnothing y$, representadas na figura abaixo para $x > 1$, são cada vez menores (mantendo espaços regulares de variação $\varnothing x$).

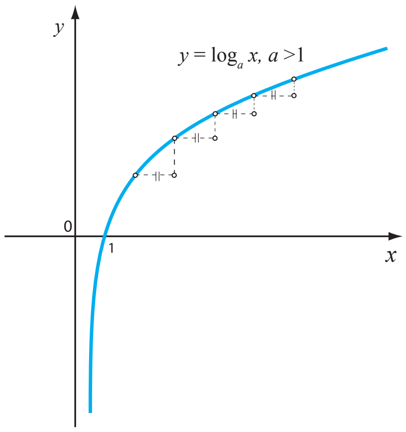


Figura 6 - *Concavidade* do gráfico de $y = \log_a x$, $a > 1$

Isso quer dizer que as taxas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ têm seu valor cada vez menor, o que significa que a função se modifica cada vez mais devagar.

Informações como essas são importantes e podem ser recuperadas de leituras de bons esboços de gráficos.

5. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO $y = \log_a x$

A função $y = \log_a x$, definida como inversa de $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ desfaz sua ação sobre um valor x, e por isso,

> 1- $\log_a(a^x) = x$, para todo x em IR.

Observe que desfazer a ação da exponencial sobre o número x corresponde a recuperá-lo a partir da expressão a^x. Isso é obtido nesta primeira propriedade, fazendo a ação $y = \log_a x$ atuar sobre a^x; ou seja, compondo as duas funções.

Da mesma forma, $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ desfaz a ação de $y = \log_a x$ em um ponto x.[3] Assim,

> 2- $a^{\log_a x} = x$, para todo x em IR^+.

A propriedade 3 é um caso especial da propriedade 1, uma vez que $a^0 = 1$, para todo a.

> 3- $\log_a 1 = 0$

Além destas, três outras propriedades são importantes quando utilizamos a função $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ na resolução de problemas. São elas:

[3] Lembre-se de que se f é inversa de g, então g é inversa de f.

4- $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$

5- $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(A) - \log_a(B)$

6- $\log_a(A^P) = p\log_a(A)$

Demonstração de 4:

Da definição de função inversa temos

f e f^{-1} são inversas, então $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

No caso do par de inversas $y = \log_a x$ e $y = a^x$, a definição se traduz

$\log_a x = c$, quer dizer $a^c = x$.

Assim, sejam $c_1 = \log_a A$ e $c_2 = \log_a B$. Então $a^{c_1} = A$, $a^{c_2} = B$; e

$\log_a(AB) = \log_a(a^{c_1}a^{c_2})$. Fazendo uso das propriedades de exponenciais,

$\log_a(a^{c_1}a^{c_2}) = \log_a(a^{c_1+c_2}) = c_1 + c_2 = \log_a A + \log_a B$, como queríamos demonstrar.

As demais propriedades se demonstram de modo análogo.

As propriedades acima são importantes na resolução de *equações logarítmicas*.

6. EXEMPLOS

6.1 Exemplo: resolvendo equações logarítmicas

Para determinar o valor de t que satisfaça

$5 = 3(10^{2t})$,

podemos escrever

$\log_{10}(5) = \log_{10}(3(10^{2t}))$. Aplicando a propriedade 4 ao segundo membro da igualdade, temos:

$\log_{10}(3(10^{2t})) = \log_{10} 3 + \log_{10}(10^{2t})$.

Veja você que, na segunda parcela dessa última expressão, temos $\log_{10}(10^{2t}) = 2t$, pela propriedade 1.

Desse modo, retomando a equação que estamos resolvendo já com essas informações escrevemos:

$\log_{10}(5) = \log_{10} 3 + 2t$. Segue que $t = \dfrac{\log_{10}(5) - \log_{10}(3)}{2}$. Em situações práticas, a escrita desse valor como um número decimal, em geral aproximado, pode ser obtida com auxílio de uma calculadora ou de uma tabela.

6.2 Exemplo: reescrevendo expressões envolvendo logaritmos

Observe o resultado que obtivemos no exercício anterior:

$$t = \frac{\log_{10}(5) - \log_{10}(3)}{2}.$$

Ainda utilizando as propriedades de logaritmos, podemos reescrever essa expressão, tornando-a concisa.

Da propriedade 5, a expressão do numerador se reescreve $\log_{10}(5) - \log_{10}(3) = \log_{10}\dfrac{5}{3}$.

Desse modo,

$$t = \frac{1}{2}\left(\log_{10}\left(\tfrac{5}{3}\right)\right).$$

Utilize agora a propriedade 6 para escrever $t = \log_{10}\left(\tfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6.3 Exemplo: avaliando a idade de um fóssil[4]

[4] HUGHES-HALLET *et al.* *Cálculo e aplicações*, p. 49, Exercício 13.

Um crânio descoberto em uma escavação arqueológica tem 10% da quantidade original de carbono-14 presente. Como avaliar sua idade?

Ora, sabe-se que a quantidade, q, de carbono-14 radioativo, que permanece no organismo t anos depois da morte, pode ser modelada por $q = q_0 e^{-0{,}000121t}$, onde q_0 é a quantidade de carbono inicial. Para respondermos à questão colocada, devemos determinar o valor do tempo t para o qual $q = \tfrac{10}{100} q_0$.

Resolvendo a equação $\tfrac{10}{100} q_0 = q_0 e^{-0{,}000121t}$, escrevemos:

$$\frac{1}{10} = e^{-0{,}000121t}$$

$\ln \tfrac{1}{10} = \ln e^{-0{,}000121t}$, ou

$-\ln 10 = -0{,}000121t$. Ou seja, $t = 10^6 \dfrac{\ln 10}{121}$.

Com o auxílio de uma calculadora, a resposta é t = 15. 678,7 anos.

7. RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Os gráficos na figura a seguir são gráficos de *funções logarítmicas*, de equação $y = k \ln x$, para diferentes valores do número real positivo *k*.

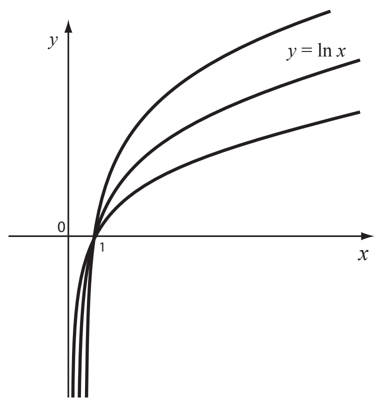


Figura 7 - Gráficos das funções $y = k \ln x$

Qualquer $y = \log_a x$ está aí representada, para um valor conveniente da constante *k*.

De fato, existe um valor adequado *k* para cada valor da base *a*, tal que

$$\log_a x = k \ln x .$$

Essa constante é conhecida como *mudança de base*.

Isso quer dizer que se conhecemos bem a função $y = \ln x$ ou, na verdade, qualquer outra $y = \log_a x$, conhecemos todas as outras *funções logarítmicas* $y = \log_a x$.

7.1 Determinando o valor da mudança de base entre $y = \log_a x$ e $y = \ln x$.

Da definição da função $y = \log_a x$ como inversa de $y = a^x$, sabemos que:

$$a = e^{\ln a} \text{ , para todo } a \geq 0$$

$$\log_a x = c \text{ é o mesmo que dizer } a^c = x .$$

Uma vez que $a = e^{\ln a}$, podemos escrever

$$a^c = \left(e^{\ln a}\right)^c = x \text{ , ou seja, } e^{c \ln a} = x .$$

Isto é o mesmo que dizer

$$c \ln a = \ln x .$$

De outro modo, $c = \dfrac{1}{\ln a} \ln x$, o que nos permite escrever $\log_a x = \dfrac{1}{\ln a} \ln x$.

Obtivemos assim o valor da constante *mudança de base*, $k = \dfrac{1}{\ln a}$.

8. UM COMENTÁRIO FINAL

Vale a pena ser feito um comentário sobre o desenvolvimento histórico dessa função.

A *função logarítmica* possui uma propriedade importante – a de transformar produtos de números em soma, que, na verdade foi o motivo de sua concepção. No século XVIII, das grandes navegações, buscavam-se modos para tornar os cálculos mais simples. O *Logaritmo* constituiu-se como um dos instrumentos que possibilitava simplificações. Historicamente, sua invenção antecede os estudos da função exponencial geral. Isto quer dizer que a ordem de apresentação dos dois conteúdos aqui neste texto inverte a ordem histórica de sua criação. No entanto, hoje é mais natural apresentá-los desse modo; inclusive porque a evolução da tecnologia, com o advento de calculadoras e computadores, tornou sem sentido o motivo inicial (transformar produtos de números em somas) da concepção dos *logaritmos*.

EXERCÍCIOS

1 - Resolva as equações, determinando o valor de t

a) $3 = 2(10^t)$ b) $7(3^t) = 2(5^t)$ c) $50.000 = 25.000e^{-0,5t}$

2 - Resolva as equações, usando logaritmos naturais na resolução.

a) $200 = 50(3)^t$ b) $a = b^t$ c) $2P = Pe^{0,2t}$

3 - Converta cada uma das funções a seguir à forma $P = P_0a^t$. Quais representam crescimento exponencial ou decaimento exponencial?

a) $P = P_0e^{2t}$ b) $P = P_0a^t$ c) $P = 79e^{-2,5t}$

4 - Converta a função $P = 72(0,5)^t$ à forma $P = P_0e^{-kt}$.

5 - Uma população P era de 1,6 milhões em 1980 e estava crescendo à taxa anual de 2,8%. Seja t o tempo em anos desde 1980.

(a) Expresse P como função na forma $P = P_0a^t$.

(b) Expresse P como função exponencial usando base e.

(c) Compare as taxas de crescimento anual e contínua.

6 - Em 1994, a população do mundo era de 5,6 bilhões, e projetava-se que a população atingiria 8,5 bilhões por volta do ano de 2030. Qual é a taxa anual de crescimento nessa previsão?

7 - O ar numa fábrica está sendo filtrado, de modo que a quantidade, P, de poluentes (em mg/litro) está decrescendo de acordo com a equação $P = P_0e^{-kt}$, onde t representa o tempo em horas. Se 10% da poluição é removida nas primeiras 5 horas,

(a) Qual porcentagem da poluição resta depois de 10 horas?

(b) Quanto tempo vai levar até que a poluição seja reduzida de 50%?

(c) Esboce um gráfico da poluição contra o tempo. Mostre o resultado de seus cálculos no gráfico, explicando por que a quantidade de poluição poderia decrescer dessa forma.

REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1999.

PINTO, M.; ARAUJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Coleção Educação a Distância)

AULA 8

Funções Trigonométricas

Objetivos

- Definir *Funções Trigonométricas*.
- Introduzir a noção de medida de ângulos em *radianos*, utilizada para definir tais funções no *Círculo Trigonométrico*.
- Esboçar gráficos de *Funções Trigonométricas*.
- Definir as *Funções Trigonométricas Inversas*, utilizando-as para resolver equações.

1. INTRODUÇÃO

Você conhece algum método para calcular a altura da Pedra do Bode?[1] Do Pão de Açúcar? E para calcular o comprimento do raio da Terra?

[1] Você sabe onde fica a Pedra do Bode? Se não sabe, faça uma consulta na Internet!

Desde muito cedo os homens se empenharam em desenvolver métodos para determinar distâncias como essas, inacessíveis por medição direta. Respostas a tais questões, e outras, foram sistematizadas, e uma coleção delas constituiu a área da matemática conhecida como *Trigonometria*.

A palavra *Trigonometria* significa mensuração no triângulo, referindo-se ao desenvolvimento de métodos para o cálculo das medidas de seus ângulos e dos comprimentos de seus lados. Esses métodos foram desenvolvidos a partir da percepção de relações entre tais medidas em triângulos retângulos semelhantes e tornaram instrumentos importantes de medição.

Depois, as primeiras noções foram estendidas para pensar relações que contemplassem ângulos maiores que 90º, levando à definição e ao estudo das *funções trigonométricas*.

Do estudo dessas funções, como extensão da *trigonometria do triângulo retângulo*, abrem-se possibilidades para a investigação e modelagem de fenômenos que, quando representados matematicamente, têm seus valores se repetindo em intervalos regulares, como ondas.

Esse será o tema central desta aula e será retomado durante seu curso, dada a sua importância.

Como leitura complementar, anexamos no Apêndice deste livro seções sobre *Semelhança de Triângulos*, pelo seu papel na fundamentação e desenvolvimento da *Trigonometria*; sobre a *Trigonometria no Triângulo*; sobre *Funções Periódicas*. Por fim, uma discussão sobre *Identidades Trigonométricas* e sua utilização para resolver equações.

2. ESTENDENDO AS NOÇÕES DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

Quando θ for o ângulo de referência para o cálculo das *razões* entre os lados de um triângulo retângulo, estes lados serão nomeados como indicado no triângulo ABC da Figura 1.

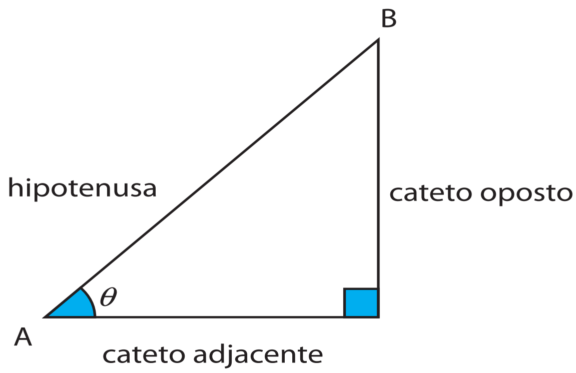


Figura 1 - Lados do triângulo retângulo relativos ao ângulo θ

Para cada valor do ângulo θ, entre 0 e 90º, destacamos na definição 2.1 a seguir as seis razões entre os comprimentos de *catetos* e da *hipotenusa*, chamadas *razões trigonométricas*.

2.1 Definição

As *razões trigonométricas seno*, *cosseno* e *tangente*, *cossecante*, *secante* e *cotangente* são expressas respectivamente por:

$$sen\theta = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}{hipotenusa} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}{hipotenusa} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta} \qquad \cot\theta = \frac{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}$$

Na Definição 2.1, observe as relações entre as três razões à direta e as três à esquerda:

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta}; \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Veja que podemos escrever as três razões à esquerda em termos das três razões à direita. Por isso, na maior parte do tempo, estudamos apenas as *razões trigonométricas* definidas como *seno*, *cosseno* e *tangente*.

Estas *razões trigonométricas* são, em particular, *funções* do ângulo θ. Mas do modo como estão definidas, não podemos considerar ângulos maiores do que 90º em seu domínio.

Como estender a definição das *razões* (como *funções*) *trigonométricas* para contemplar ângulos θ quaisquer?

A Figura 2 ilustra uma proposta, em que os ângulos são medidos a partir do semieixo positivo *x*. Por convenção, o sentido anti-horário da rotação do raio *OP*, como assinalado na Figura 2, corresponderá a valores positivos da medida dos ângulos.

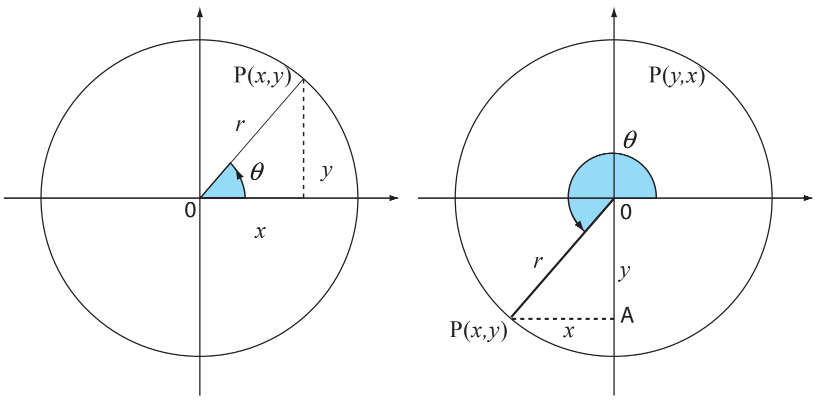


Figura 2 - Estendendo a Trigonometria do Triângulo

Para prosseguirmos, observe o ponto $P(x, y)$ em ambos os quadros da Figura 2 e analise o triângulo retângulo "imaginário" constituído por sua ordenada, abscissa *x* e o raio *OP*. Dê o nome de *r* ao comprimento ou norma de *OP*.

Com essa linguagem, e utilizando a Definição 2.1, é possível reescrever as *razões trigonométricas* como a seguir:

$$sen\theta = \frac{ordenada \quad do \quad ponto \quad P}{|OP|} = \frac{y}{r};$$

$$\cos\theta = \frac{abcissa \quad do \quad ponto \quad P}{|OP|} = \frac{x}{r};$$

$$\tan\theta = \frac{ordenada \quad do \quad ponto \quad P}{abcissa \quad do \quad ponto \quad P} = \frac{y}{x}.$$

Confirme na Figura 2 que esta reescrita passa a admitir ângulos maiores que 90º na determinação de *razões trigonométricas*. E ainda que as *razões* (que são *funções* de θ) reescritas para ângulos menores que 90º coincidem com as definições das *razões trigonométricas* para ângulos entre zero e 90º, como apresentada na *Trigonometria no Triângulo*.

Essa proposta de extensão da *Trigonometria no Triângulo* para contemplar ângulos θ quaisquer está sistematizada na definição a seguir.

2.2 Definição

Em um sistema de coordenadas cartesiano, seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer na reta passando pela origem que forma um ângulo θ com a direção positiva do eixo *x* (Figura 2).

Chamando $\left|\overline{OP}\right|$ de *r*, definimos

$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$tan\theta = \frac{y}{z} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

2.3 Comentários

Como divisões por zero não são permitidas, as *razões* $\tan\theta$ e $\sec\theta$ não estão definidas quando $x = 0$; ou seja, para $\theta = 90^0$.

Pelo mesmo motivo, $\csc\theta$ e $\cot\theta$ não estão definidas quando

$y = 0$; ou seja, para $\theta = 0^0$.

Nessa extensão das *razões trigonométricas* para contemplar ângulos maiores do que 90º, utilizamos outra unidade de medida de ângulo, chamada *radiano*. Motivos dessa convenção serão discutidos ainda nesta aula. Para isso relembramos também o sentido ou orientação positiva adotada para o ângulo θ: positivo, se medido no sentido anti-horário, a partir do eixo *x*.

3. MEDIDAS DE ÂNGULO

Na *Trigonometria do Triângulo* os ângulos foram medidos como se indicassem direções, em graus. A unidade 1º corresponde a 1/360, parte de uma volta completa num plano, em torno de um eixo. Isto quer dizer que o ângulo dado por uma volta completa mede 360º.

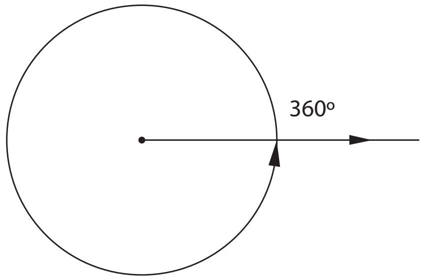


Figura 3 - Medida do ângulo de uma volta

Ao estender a *Trigonometria no Triângulo* introduzimos um outro modo de medir ângulos. Nesse novo modo, representamos a volta completa de 360º desenhando um círculo. A nova unidade de medida de ângulo, chamada de 1 radiano, corresponde ao ângulo que subtende um arco de comprimento igual ao seu raio.[2] Explore a Figura 4 e confirme o que estamos dizendo.

[2] Uma vez que círculos são figuras geométricas semelhantes (a forma é sempre a mesma!), esta medida não varia com o comprimento de seus raios.

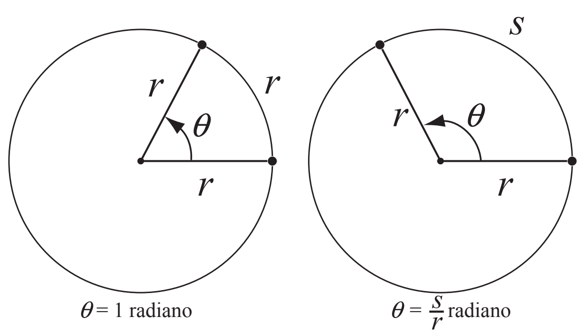


Figura 4 - Medida de ângulos em radianos

O símbolo usado para a medida *radiano* é rad.

Convencionando o sentido de rotação anti-horário como positivo, vamos definir a medida de um ângulo central arbitrário θ, como a seguir.

3.1 Definição

A medida em *radianos* de um ângulo central θ em um círculo corresponde à razão entre os comprimentos do arco subtendido e o seu raio. Ou seja, em radianos, $\theta = \dfrac{s}{r}$.

Em outras palavras, tomando o raio do círculo como a unidade de comprimento, a medida de um ângulo corresponderá à medida linear do arco por ele subtendido, com a orientação como foi definida. Observe novamente a Figura 4, relacionando-a com a definição de *radiano*.

3.2 Exemplo: utilizando a Definição 3.1

a) Se o raio de um círculo for 4 cm, então a medida, em radianos, do ângulo que subtende um arco de 8 cm, será $\theta = \frac{8}{4} rad = 2rad$.

b) A Figura 5 representa dois satélites artificiais, circulando ao redor da Linha do Equador. O raio de sua órbita é, aproximadamente, $3 \times 10^8 m$. Para uma separação angular registrada de $\theta = 0,03rad$, o comprimento de arco que separa os dois satélites pode ser calculado como

$$s = r\theta = (3 \times 10^8 m)(0,03rad) = 9 \times 10^6 m.$$

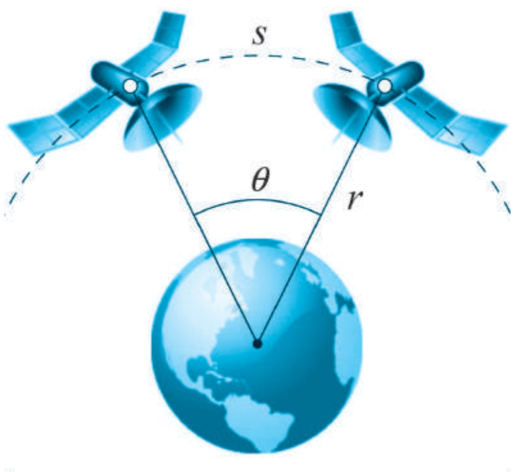


Figura 5 - Satélites em órbita

Podemos fazer corresponder as medidas de ângulos, em graus, às suas medidas em *radianos*: lembrando que a circunferência tem comprimento $c = 2\pi r$, então um ângulo completo de uma volta, correspondente a 360º, é equivalente a $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi\, rad$.

Veja que $\theta = \pi$ corresponde a meia-volta, ou seja, 180º.

Assim, $2\pi\, rad \cong 360°$, $\pi\, rad \cong 180º$, $1\, rad \cong \frac{180°}{\pi} \cong 57,29°$ e $1º \cong \frac{\pi}{180} rad \approx 0,017 rad$.

A Figura 6 a seguir representa algumas medidas de ângulo em *radianos*, considerando os sinais positivo e negativo, de acordo com sua *orientação*.

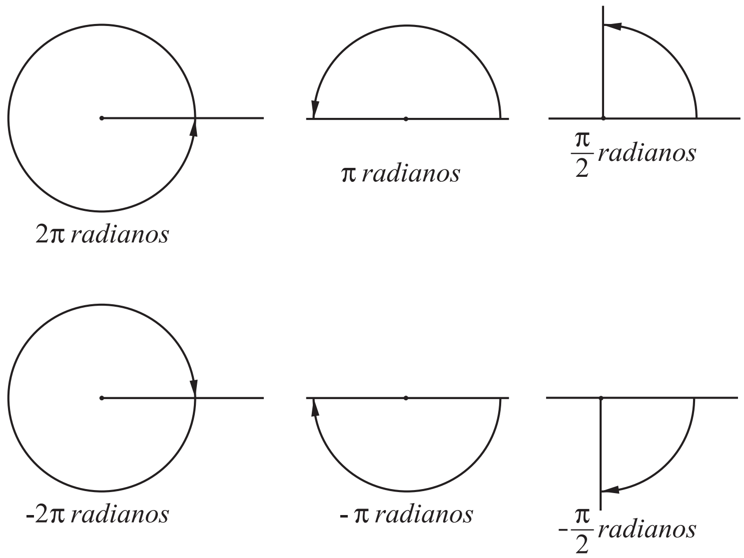


Figura 6 - Medindo ângulos em radianos

3.3 Exemplo: conversão de medidas de ângulos

Um ângulo de 60º vale $60 \times 1°$. Portanto, em radianos $60º \cong 60\left(\frac{\pi}{180}\right) rad = \frac{\pi}{3} rad$.

Um ângulo de $\frac{\neq}{4} rad$ vale $\frac{\pi}{4} \times 1\, rad$. Portanto, em graus, $\frac{\pi}{4} rad \cong \frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45º$.

3.4 Notação, linguagem e convenções

Na definição e estudo das *Funções Trigonométricas*, a convenção será medir ângulos como proposto na Definição 3.1. Assim, de agora em diante, as medidas dos ângulos θ serão em *radianos*, a partir do semieixo positivo O, considerando seu sentido de rotação anti-horário como o sentido positivo.

A letra x passará a nomear a *variável independente* das *funções trigonométricas* e corresponde à medida do ângulo denominado até o momento pela a letra grega θ. A letra y estará, na maioria das vezes, referindo-se ao valor da *função trigonométrica* para cada valor de x, medido em *radianos*.

Estes acordos adéquam notação e linguagem às do conceito de função real, como trabalhado no Cálculo.[3]

[3] Esta mudança na notação tem o propósito de adequar a notação àquela utilizada no contexto das funções reais de variáveis reais. Ao medir o ângulo em radianos, possibilitamos a representação das funções trigonométricas em sistemas de coordenadas cartesianos, adotando uma mesma unidade de medida em ambos os eixos. Este é o modo como trabalhamos com as funções reais, em matemática. Estabelecido este acordo, estamos em condições de definir Funções Trigonométricas como funções reais de variáveis reais, no Círculo Trigonométrico.

4. O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Razões trigonométricas independem das dimensões dos lados do triângulo retângulo considerado e estão em função apenas da medida x do ângulo (que antes chamávamos de θ). Por isso, na Definição 2.1 podemos considerar $r = |OP| = 1$. Feita essa opção, o ponto P, representado nas figuras 7 e 8, descreverá um círculo de raio 1, quando variamos os valores de suas abscissas e ordenadas.

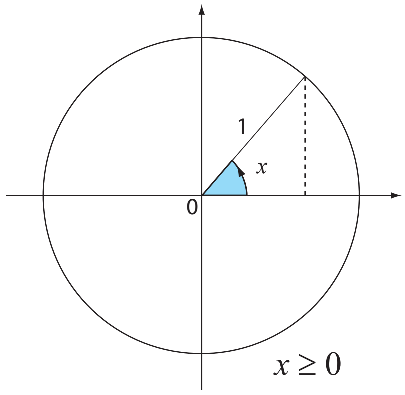


Figura 7 - Medida de ângulo $x \geq 0$

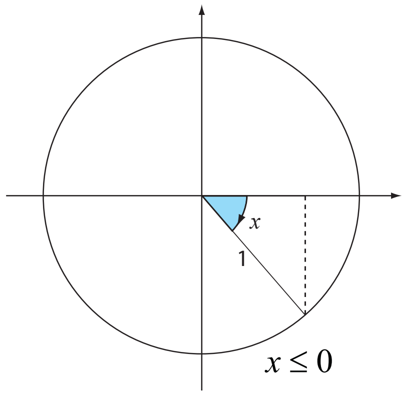


Figura 8 - Medida de ângulo $x \leq 0$

Observe ainda nas figuras 7 e 8 os cuidados com as medidas de ângulo, em termos da orientação.

4.1 Definição

Chamamos *Círculo Trigonométrico* a uma representação de um círculo que inclui os elementos destacados acima: raio 1, medida de ângulos centrais em radiano, sentido anti-horário de rotação tomado como positivo ao medir ângulos.

Uma definição possível para as *Funções Trigonométricas* como funções em *IR* se beneficia da noção de *Círculo Trigonométrico*.[4]

4.2 Definição

Para um ângulo (de medida) x no *Círculo Trigonométrico* no plano uv, os valores $\cos x$ e $senx$ são as coordenadas $(\cos x, senx)$ do ponto de interseção P da reta suporte do ângulo com o círculo $u^2 + v^2 = 1$. As funções $y = \cos x$ e $y = senx$ definidas deste modo têm domínio *IR* e são denominadas *função cosseno* e *função seno*, respectivamente.

Veja o que a Definição 4.2 diz, explorando as figuras a seguir.

[4] Digo aqui "uma definição possível" porque poderíamos perfeitamente defini-las de outros modos. Por exemplo, poderíamos defini-las organizando-nos a partir da representação de um círculo, mas considerando outros valores diferentes de 1 unidade para o raio *r*.

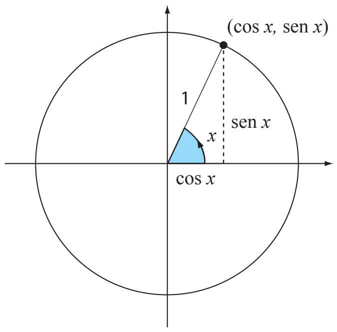


Figura 9 - Seno e cosseno no 1º quadrante

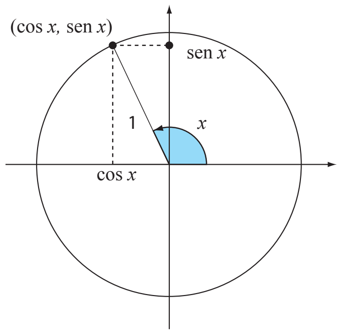


Figura 10 - Seno e cosseno no 2º quadrante

Ainda nas figuras 9 e 10, observe que ângulos (de medida) x e $x+2k\pi$ correspondem ao mesmo ponto $P=(\cos x, sen x)$ sobre o *Círculo Trigonométrico*.

Se k for um número inteiro, o número $2k\pi$ representa a medida de k comprimentos de medida 2π, correspondendo então a k vezes o comprimento do círculo de raio 1. Explorando novamente as mesmas figuras 9 e 10, você verá que os ângulos x e $x+2k\pi$ correspondem ao mesmo ponto $P=(\cos x, sen x)$ sobre o *Círculo Trigonométrico*.

Isso quer dizer que os valores da abscissa e da ordenada do ponto P, em função do ângulo x, se repetem em ciclos, de *período*[5] igual a 2π. Dito de outro modo, as funções seno e cosseno, que correspondem, respectivamente, à ordenada e à abscissa do ponto $P=(\cos x, sen x)$, têm *período* 2π.

[5] Entenda o período como o menor intervalo de valores de x em que um ciclo da função se completa.

Vamos escrever essas observações em linguagem matemática.

4.3 Notação e linguagem

As funções $y = sen x$ e $y=\cos x$ são *funções periódicas* de *período* 2π, satisfazendo a:

$sen(x) = sen(x+2k\pi)$, para todo inteiro k.

$\cos(x) = \cos(x+2k\pi)$, para todo inteiro k.

4.4 Exemplo: resolvendo equações

Que valores de x satisfazem a equação $sen x - 1 = 0$?

Escrito de outro modo, queremos determinar os valores de x para os quais $sen x = 1$. No intervalo $[0, 2\pi]$, isto acontece apenas quando $x=\dfrac{\pi}{2}$. Assim, todas as soluções possíveis, em *IR*, serão dadas por

$x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, para k número inteiro.

5. CONSTRUINDO GRÁFICOS

Os sinais das funções trigonométricas, quando positivos, estão representados na Figura 11. Uma justificativa para este quadro de sinais decorre do fato de as funções trigonométricas terem sido definidas como razões das ordenadas e abscissas de pontos em cada um dos quadrantes. Esta análise será útil para o traçado de gráficos.

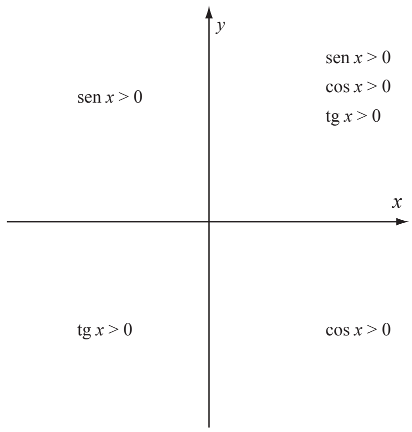


Figura 11 - Sinais das Funções Trigonométricas

5.1 O gráfico da Função Seno

A função $y = senx$ é definida para todo número real x. É uma *função periódica*, de *período* 2π . Por isso, basta explorarmos o traçado de seu gráfico para x no intervalo $[0, 2\pi]$.

Relembrando que $-1 \leq senx \leq 1$, para todo valor de x, seu gráfico estará totalmente contido na faixa do plano determinada pelas retas $y = -1$ e $y = 1$, como na Figura 12. Dizemos que sua *amplitude*[6] vale 1.

[6] A amplitude de uma função periódica é a metade da diferença entre seu maior valor da oscilação e o seu menor valor.

Não temos elementos para garantir que a *concavidade* do gráfico da função será como a do desenho. No entanto, auxiliados pela Tabela 1 de valores da função $y = senx$ para valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ e pelo quadro de sinais, esboçamos a forma do gráfico.

Tabela 1
Valores da função $y = senx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$senx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

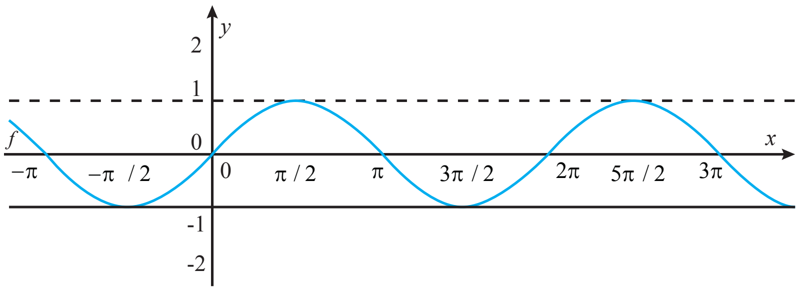


Figura 12 - Gráfico da Função Seno

5.2 O gráfico da Função Cosseno

O gráfico da *função cosseno* pode ser obtido a partir do gráfico da *função seno,* desenhado acima, retomando

- a identidade[7] $\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e

- a discussão sobre *translações horizontais*, em nossa Aula 4. Seu esboço terá a forma

[7] Estude o Apêndice 4 neste livro.

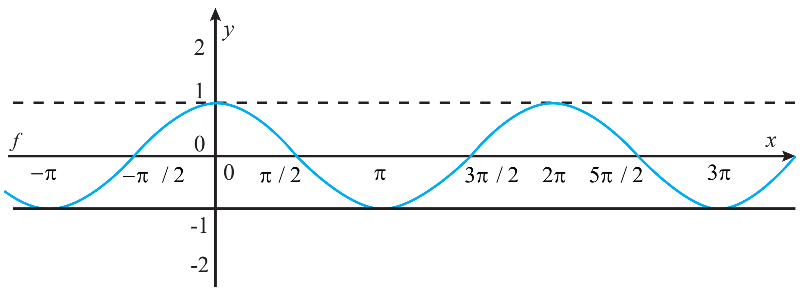


Figura 13 - Gráfico da Função Cosseno

5.3 O gráfico da Função Tangente

Observe nas figuras 14 e 15 as representações do comprimento PT da tangente do ângulo θ. As representações são válidas porque, pela semelhança dos triângulos, podemos escrever que $\frac{PT}{1} = \frac{y}{x} = \tan\theta$.

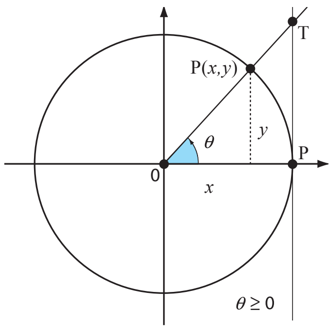


Figura 14 - A Tangente no 1º quadrante

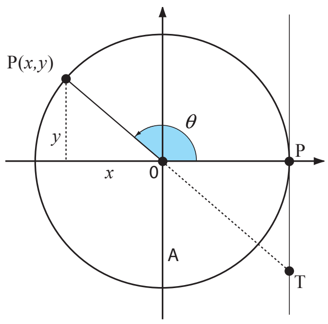


Figura 15 - A Tangente no 2º quadrante

Explore a variação desse comprimento, imaginando a posição do eixo suporte $OP(x, y)$ se movendo no sentido anti-horário, em torno do ponto O: o comprimento PT fica muito grande, positivo, quando θ fica próximo de $\frac{\pi}{2}$, no primeiro quadrante. Quando θ fica próximo de $\frac{\pi}{2}$, no segundo quadrante, o comprimento PT será marcado abaixo do eixo x, correspondendo a valores negativos para a tangente. Ou seja, para tais valores de θ, o valor da tangente é negativo, com valor absoluto muito grande. E o que acontece quando θ está próximo de $\frac{3\pi}{2}$? Faça uma análise semelhante à que foi feita para o caso em que θ fica próximo de $\frac{\pi}{2}$.

Por fim, veja que a função $y = \tan x$ não admite valores para $x = k\frac{\pi}{2}$, k ímpar, que são os zeros da função $y = \cos x$.[8] Estes valores não pertencem ao domínio da função $y = \tan x$, porque $\tan x = \frac{senx}{\cos x}$ e o nosso sistema numérico não admite divisão por zero.

Situações semelhantes às que foram discutidas para θ próximo de $\frac{\pi}{2}$ e de $\frac{3\pi}{2}$ ocorrerão nos demais valores $x = k\frac{\pi}{2}$, k ímpar. Isto justifica em parte por que o gráfico da função tangente terá sua forma como representada na Figura 16.

[8] Lembre-se de que os zeros da função $y = \cos x$ ocorrem em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

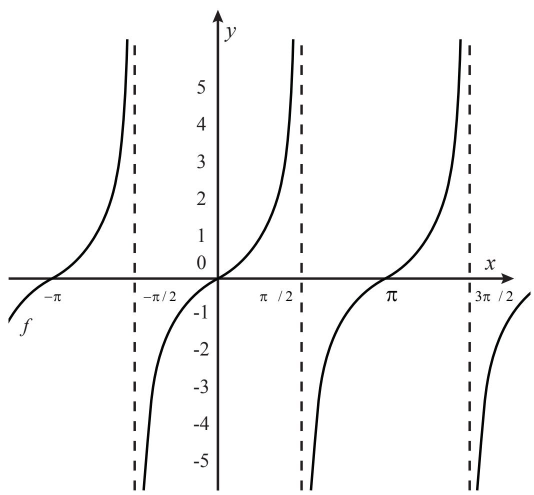


Figura 16 - Gráfico da Função Tangente

5.4 Exemplo: construindo novas funções

Na Aula 4, esboçamos gráficos de funções $y = f(x)$ expressas como translações de funções $y=g(x)$, cuja fórmula ou gráfico eram conhecidos. Em outras palavras, uma vez conhecido o gráfico de $y=g(x)$, aprendemos a esboçar o gráfico de $y=f(x)=g(x)+k$ ou $y=f(x)=g(x+k)$. Vamos retomar aqui os mesmos procedimentos que utilizamos lá, para esboçar gráficos de funções que envolvem funções trigonométricas em sua expressão, tais como $y=\pi+\cos x$, ou $y=\cos(x+\pi)$.

5.4.1 Exemplos: translações verticais e translações horizontais

O esboço de $y=\pi+\cos x$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y=\cos x$, por meio de uma *translação vertical*, adicionando o numero π a todas as ordenadas dos pontos sobre o gráfico. Lembre-se de que $\pi\approx 3{,}14$.

Observe que a faixa que encerra o gráfico da função, determinada pelas retas $y=-1$ e $y=1$, passará a corresponder a $y=-1+\pi$ e $y=1+\pi$. O gráfico de $y=\pi+\cos x$ terá a mesma forma de $y=\cos x$, incluindo o mesmo período, porém encerrado nessa outra faixa no plano. Tente fazer seu esboço!

Já no caso de $y=\cos(x+\pi)$, seu gráfico será obtido a partir do de $y=\cos x$ por meio de uma *translação horizontal* de π unidades para a esquerda. Nenhuma modificação haverá na faixa no plano que encerra o gráfico.[9]

Observe que as *translações horizontais* e as *translações verticais* não modificam a *amplitude* e o *período* das funções trigonométricas.

[9] Confira que já fizemos uma translação horizontal em 4.3, ao esboçar o gráfico de $y=sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

5.4.2 Exemplo: modificações na Amplitude e no Período[10]

[10] Os exemplos particulares que trazemos aqui representam casos gerais, no sentido de indicar procedimentos gerais a que podemos recorrer.

Como esboçar o gráfico de uma função como $y=2senx$?

Veja sua tabela de valores, apresentada abaixo para x no intervalo $[0,2\pi]$.

Tabela 2
Valores de $y=2senx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2senx$	0	$2\times\frac{1}{2}$	$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$	2×1	$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\times\frac{1}{2}$	0	2×-1	0

Observe que todas as *ordenadas* dos pontos que estarão sobre o gráfico estão multiplicadas por 2, o que inclui os valores $y=1$ e $y=-1$, que são os valores maior e menor da oscilação. Lembre-se de que estes últimos determinam as duas faixas no plano que limitam o gráfico da função.

Observe que os *zeros* da função não se modificam e nem o seu *período*.

Tente esboçar o gráfico da função, desenhando primeiro as retas $y = -2$ e $y = 2$, que determinam a faixa no plano que vai encerrar o gráfico.

Como segundo exemplo, vamos discutir o gráfico de $y = sen(2x)$. Para começar, lembre-se de que se $0 \leq 2x \leq 2\pi$, ou seja, se $0 \leq x \leq \pi$, então $sen2x$ terá percorrido um *ciclo* completo. Isto quer dizer que o *período* da função $y = sen(2x)$ é π.

Veja na Tabela 3 como isso acontece.

Tabela 3
Valores de $y = sen(2x)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$sen2x$	0	$sen\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) = sen\frac{\pi}{2} = 1$	$sen\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = sen\pi = 0$	$sen\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right) = sen\frac{3\pi}{2} = -1$	0

Não há alteração na *amplitude*, e o gráfico completa seu ciclo em $0 \leq x \leq \pi$. Faça o esboço!

6. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Todas as funções trigonométricas não admitem *inversa* em seu domínio, uma vez que elas não são injetoras nele.[11]

No entanto, podemos restringir o domínio de cada uma delas, de modo a possibilitar a obtenção das inversas. Em cada caso, essa restrição pode ser feita de muitas formas. Vamos utilizar as restrições que são consideradas como *domínios principais* das inversas.[12]

[11] Retome a aula sobre Funções Inversas e procure justificar as afirmações feitas.

[12] Lembre-se de que domínios e imagens serão parte integrante das funções que serão definidas.

6.1 A Inversa da Função Seno

A função $y = senx$ é injetora quando definida em $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, porque seus valores não se repetem nesse intervalo, pois ela é crescente.[13] Podemos definir sua inversa nesse intervalo. Ela é denominada função arco seno.

[13] Ver a definição de *função crescente*.

De sua definição como inversa da função seno, seu domínio é $[-1,1]$, que é a imagem da função seno. Por sua vez, sua imagem é o intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que é a restrição do domínio escolhida.

O gráfico será obtido como a reflexão, em torno da reta $y = x$, da curva gráfico de $y = senx$, para x em $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

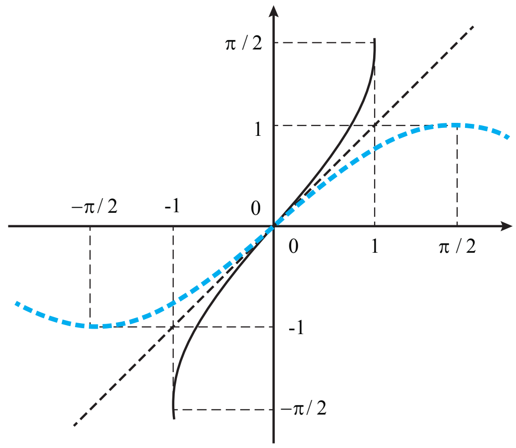


Figura 17 - O gráfico de $y = arcsenx$

A função arco seno de x, simbolizada por $y = arcsenx$, é o ângulo no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é x. De outro modo, $y = arcsenx$ significa $x = seny$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

6.1.1 Exemplo: resolvendo equações

Sabemos que $sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Para encontrarmos um ângulo cujo seno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, então podemos responder que um valor para esse ângulo é $\frac{\pi}{3}$. Ou seja, $arcsen\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Há outros ângulos com essa propriedade; mas aqui estamos respondendo de acordo com a restrição ao domínio $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, conforme combinamos.

Assim, resolver a equação $arcsenx = \frac{\pi}{3}$ é escrever $x = sen\frac{\pi}{3}$, ou seja, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.2 A inversa da Função Cosseno

Observe o gráfico de $y = \cos x$ e verifique que essa função é injetora no intervalo $[0, \pi]$.

Sua função inversa, $y = \arccos x$, é denominada arco cosseno. Seu domínio é $[-1,1]$, e sua imagem é $[0, \pi]$. Do mesmo modo que a função arco seno, temos que $y = \arccos x$ significa $x = \cos y$, para $0 \leq y \leq \pi$.

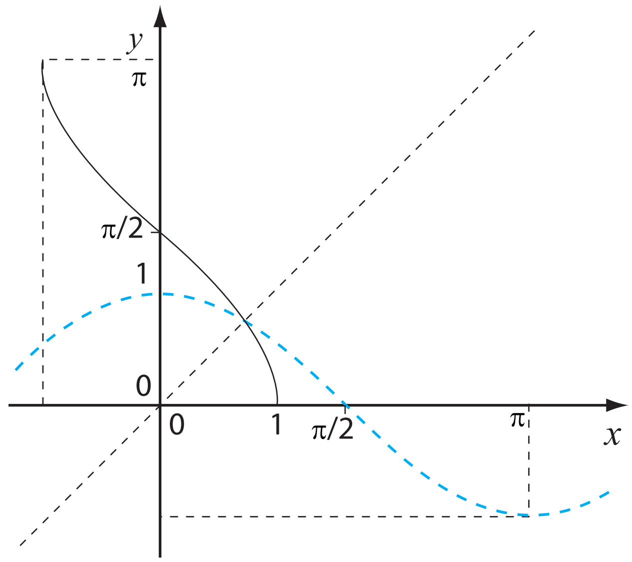


Figura 18 - O gráfico de $y = \arccos x$

6.3 A inversa da Função Tangente

A Função Arco Tangente é definida do mesmo modo que as duas inversas já estudadas. Temos

$y = \arctan x$ se e somente se $x = \tan y$, para $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

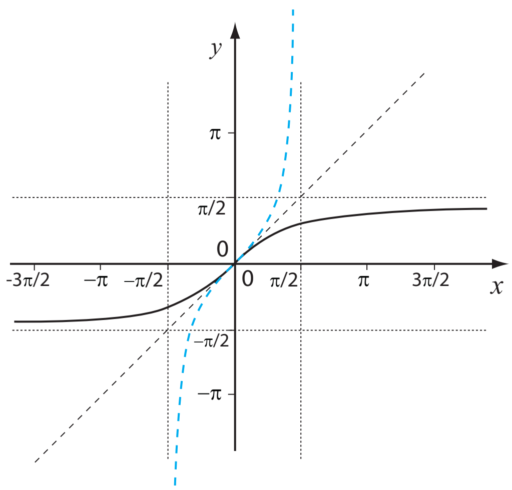


Figura 19 - O gráfico de $y = \arctan x$

O domínio de $y = \arctan x$ é $(-\infty, +\infty)$, e a imagem é $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Veja como o gráfico está todo dentro na faixa do plano limitada por

$y = -\dfrac{\pi}{2}$ e $y = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCÍCIOS

1- Um menino empina uma pipa a 3 *m* de altura, num ângulo de visão que num certo momento é de 45º. Qual o comprimento da linha que está sendo dado nesse momento?

2- Uma câmera de filmar está localizada em um poste a 4 *m* do solo e acompanha um carro em movimento. No momento em que o carro está a 6 *m* do poste, qual o ângulo entre o foco da câmera e o poste?

3- Uma escada de 2 *m* está encostada num muro, fazendo um ângulo de 35º com o chão. Qual a altura de seu topo, em relação ao chão? Qual a distância entre a sua base e o muro?

4- Calcular os valores de todas as funções trigonométricas, no caso de o ponto $P(x,y)$ na Figura 2 ter coordenadas: $(1,3)$; $(2,-5)$. Faça um desenho representando o ângulo θ em cada um dos casos.

5- Converta de graus para radianos: 30º; 150º; 640º.

6- Converta de radianos para graus: $\frac{\pi}{5} rad$; $2rad$.

7- Que valores de *x* satisfazem $\cos x - 1 = 0$?

8- Que valores de *x* satisfazem $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$?

9- Em uma circunferência de raio 4, qual o comprimento do arco oposto a um ângulo central de $\frac{5\pi}{3}$ rad? E de 60º?

10- Resolva: $senx = \tan x$, para *x* em $[0, 2\pi]$.

11- Para $senx = \frac{3}{5}$, *x* em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, determine o valor de $\cos x$ e $\tan x$.

12- Diga qual o *período* das seguintes funções:

(a) $y = sen(x-3)$ (b) $y = \pi + senx$ (c) $y = \frac{1}{2}\cos x$ (d) $y = 3sen(x+5)$ (e) $y = 3sen(4x)$

13- Diga qual a *amplitude* das funções da questão 12.

14- Esboce os gráficos das funções da questão 12.

15- Faça $y = x$ na identidade $\cos(x+y) = \cos x \cos y - senxseny$ e escreva a identidade nova.

16- Faça $-y$ na identidade $\cos(x+y) = \cos x \cos y - senxseny$ e escreva a identidade nova.

17- Mostre que $\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Sugestão: use a fórmula de adição de arcos.

18- Resolva $sen2x = \cos x$ em $[0, 2\pi]$.

19-Esboce o gráfico de $y = sen(x+2)$.

20- Esboce o gráfico de $y = -2 + senx$.

21- Complete[14] a tabela abaixo, como indicado, levando em conta que $\cos x = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Tabela de valores da função $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$					$sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0$				$sen\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1$		0

22- Esboce os gráficos de $y = \cos 3x$ e de $y = 3\cos x$.

[14] Sugestão: utilize a tabela dos valores da função seno. Não se esqueça de que a função seno é uma função periódica, de período 2π.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FINNEY, R; WEIR, M; GIORDANO, F. *Cálculo*. George B. Thomas. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

GAULTER, B.; LESLYE, B. *Modular Mathematics for GCSE*. Great Britain: Oxford University Press, 1991.

HOLDERNES, J. *GCSE Maths Higher Level*. Causeway Press Ltd: Great Britain, 1987.

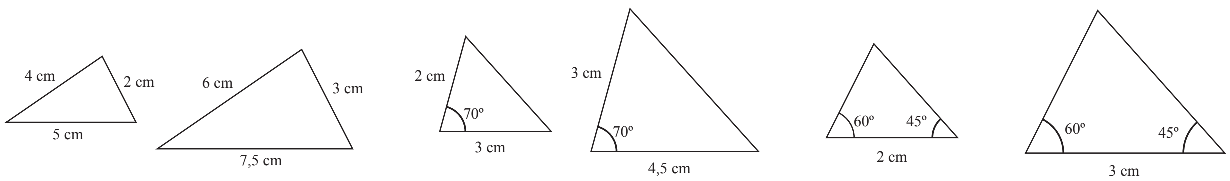
SIMMONS, G. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw Hill Ltda., 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. vol. I.

APÊNDICES

APÊNDICE 1- SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Triângulos semelhantes são aqueles que têm a mesma forma. Em termos das relações entre as medidas de seus lados e ângulos, é o mesmo que dizer que ângulos correspondentes são iguais, e lados correspondentes são proporcionais.[1]



1(a) 1(b) 1(c)

Figura 1 - Casos de semelhança de triângulos

1. PROPOSIÇÃO

Nós temos certeza de que dois triângulos são semelhantes quando:

- os três lados do primeiro triângulo são proporcionais aos três lados do segundo triângulo, como na Figura 1(a).
- um ângulo igual, com dois lados adjacentes no primeiro triângulo proporcionais aos dois lados adjacentes no segundo, como na Figura 1(b).
- os três ângulos do primeiro triângulo são iguais aos três ângulos do segundo triângulo, como na Figura 1(c).[2]

A certeza de que dois triângulos que satisfazem uma dentre as três condições acima são semelhantes decorre de um teorema, o *Teorema de Tales*. Por este Teorema, podemos provar, em cada uma das três situações acima, que ângulos correspondentes são iguais e que lados correspondentes são proporcionais.

[1] Quando os lados correspondentes de dois triângulos têm o mesmo comprimento, eles são chamados congruentes.

[2] Lembre-se de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º. Por isto, basta confirmarmos que dois ângulos do primeiro triângulo são iguais a dois ângulos do segundo triângulo.

2. NOTAÇÃO E LINGUAGEM

Em linguagem matemática, escrevemos:
se dois triângulos ABC e DEF são semelhantes, então

a) $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$

b) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

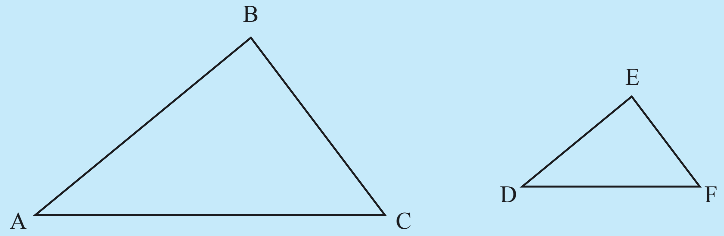


Figura 2 - Triângulos semelhantes

3. EXEMPLO: VERIFICANDO A SEMELHANÇA DE DOIS TRIÂNGULOS

Observe os triângulos ABC e ADE na Figura 3. Eles são semelhantes porque têm um ângulo comum: Â, e têm dois ângulos correspondentes iguais: $A\hat{B}C = \hat{D}$ e $A\hat{C}B = \hat{E}$ (Teorema de Tales).

Assim, a conclusão segue pela Proposição 1-(c).[3]

[3] Você sabe calcular a medida de EC?

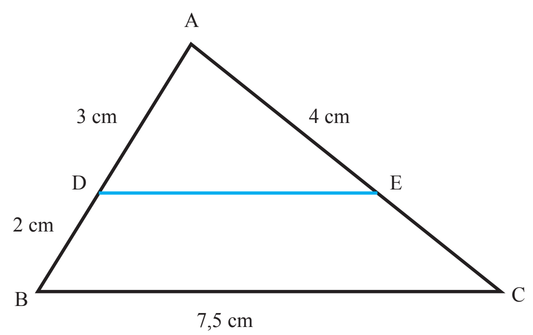


Figura 3 - Verificação da semelhança entre dois triângulos

4. EXEMPLO: UTILIZANDO A NOÇÃO DE SEMELHANÇA

Explore a Figura 4.

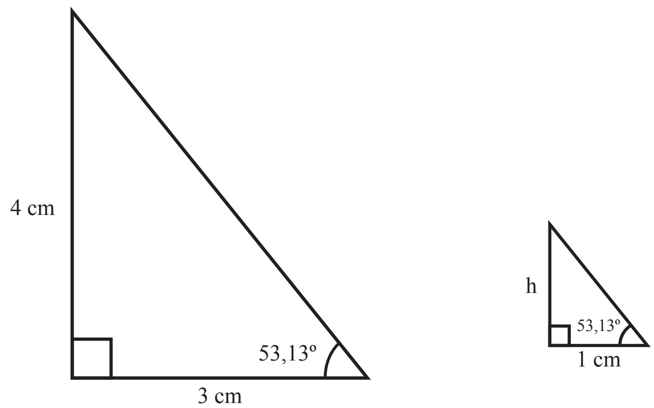


Figura 4 - Alturas de triângulos retângulos semelhantes

Em ambos os triângulos na Figura 4, o ângulo da base mede aproximadamente 53,13º.

Uma vez que os dois triângulos são triângulos retângulos, e a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º, então eles têm os três ângulos iguais. Podemos concluir, pela Proposição 1(c), que os dois triângulos são semelhantes.[4]

A base do primeiro triângulo é $3cm$ e a altura é $4cm$. Então, uma vez que a base do segundo triângulo mede $1cm$, sua altura h deverá ser $\frac{4}{3}cm$, porque os lados correspondentes dos dois triângulos serão proporcionais.

Essa conclusão decorre de 2-b, que permite escrever:

$$\frac{\text{altura do primeiro triângulo}}{\text{base do primeiro triângulo}} = \frac{\text{altura do segundo triângulo}}{\text{base do segundo triângulo}}$$

Ou seja: $\frac{4}{3} = \frac{h}{1}$, e então

$$h = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Uma questão deixada para você: como calcular a hipotenusa de (ambos) os triângulos?

[4] Qual será, aproximadamente, a medida do ângulo desconhecido deste triângulo? Você sabe como calculá-lo?

5. EXERCÍCIO

a) Explique por que os dois triângulos na Figura 18 são semelhantes, retome o exemplo 4, para construir seus argumentos.

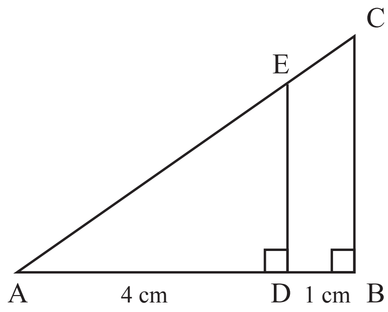


Figura 5 - Razões entre lados em triângulos semelhantes

b) Qual e o valor da razão $\dfrac{AD}{AB}$?

c) E da razão $\dfrac{ED}{CB}$?

d) Se DE=5, qual o valor do comprimento BC?

6. EXEMPLO: JUSTIFICANDO E UTILIZANDO A NOÇÃO DE SEMELHANÇA

Na Figura 6, o comprimento CB representa uma tangente ao círculo de centro em O, tocando-o no ponto B.

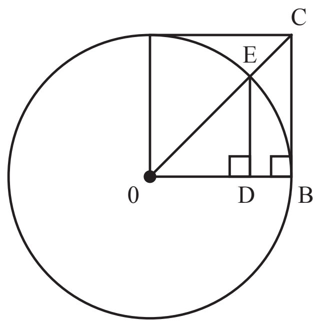


Figura 6 - Usando a noção de semelhança

Neste caso, CB e OB são perpendiculares, porque as tangentes a um círculo são perpendiculares ao seu raio, pelo ponto de tangência.

Por isso, os ângulos ODE e OBC serão iguais a 90º.

Uma vez que os dois triângulos OCB e OED têm um ângulo comum em O, eles são semelhantes, porque todos os ângulos correspondentes são iguais!

Então, os lados correspondentes dos dois triângulos são proporcionais. Você sabe escrever as razões iguais nestes triângulos?

APÊNDICE 2 - RETOMANDO NOÇÕES DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

A *Trigonometria no Triângulo Retângulo* foi estudada ainda antes do século 150 a.C. Nesse período, Hiparcus, um matemático grego que trabalhava em Alexandria, organizou os dados existentes na época em uma primeira tabela. Essa tabela foi desenvolvida como instrumento para calcular distâncias e comprimentos, tais como as alturas de árvores e pirâmides.[5]

[5] Mais tarde, os astrônomos utilizaram as tabelas desenvolvidas a partir deste método para calcular a distância entre planetas e estrelas.

No caso do cálculo da medida destas últimas, a estratégia na época consistiu em comparar a sombra do objeto, alto e inacessível que se queria medir, com a sombra de uma vara ou régua, de altura conhecida. Como os raios de sol incidem sobre os dois objetos segundo um mesmo ângulo, as razões entre as suas sombras e as suas alturas são iguais, uma vez que estas últimas podem ser representadas como os lados correspondentes em triângulos semelhantes.

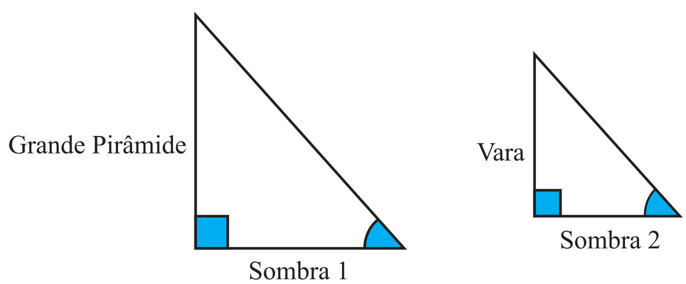


Figura 1 - A altura da Grande Pirâmide

1. EXEMPLO: CÁLCULO DA ALTURA DA GRANDE PIRÂMIDE DO EGITO

A Figura 1 representa as dimensões da Grande Pirâmide do Egito. Para uma vara de comprimento $3m$, já se sabia que, em um momento de um certo dia do ano, sua sombra tem comprimento $2m$ quando a sombra da Pirâmide mede $98m$.

Da *semelhança de triângulos*, podemos escrever que.

$$\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{Comprimento da sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da vara}}{\text{comprimento da sombra da vara}}$$

A altura (ou comprimento) da vara e os comprimentos de sua sombra e da sombra da pirâmide são conhecidos.

Podemos determinar a altura h da pirâmide por meio da *razão de semelhança* que expressamos:

$$\frac{h}{98} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 147m.$$

2. EXEMPLO: CÁLCULO DO LADO DE UM TRIÂNGULO

Explore os triângulos representados na Figura 1 e confirme o fato de que eles são semelhantes.[6] Qualquer outro triângulo semelhante a estes dois terá seus lados correspondentes à mesma razão e seus lados podem ser calculados, se esta razão for conhecida.

[6] Como você justifica esta afirmação? Se você estiver em dúvida, consulte a seção sobre Semelhança de Triângulos.

Observe como você pode calcular a altura de um novo triângulo, semelhante ao de altura 4*cm* e base 3*cm*, representado na Figura 2: primeiro, você compara o triângulo conhecido com um triângulo semelhante a ele, que tem sua base valendo 1*cm*.

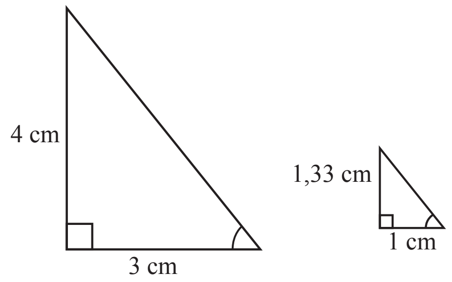


Figura 2 - Relação entre alturas de triângulos semelhantes

Nesse caso, a altura h do triângulo de base 1 será sua base multiplicada por 1,33 (valor aproximado), porque $\frac{4}{3} = \frac{h}{1}$, ou seja, $h = 4 \div 3 \cong 1{,}33$.

Assim, a altura h de qualquer outro triângulo semelhante a estes dois poderá ser obtido multiplicando sua base por 1,33.

Confirme esta afirmação, representando um novo triângulo semelhante aos dois da Figura 2 e escrevendo a razão de semelhança.

3. NOTAÇÃO E LINGUAGEM

No triângulo retângulo ABC da Figura 3, se θ for o ângulo de referência para o cálculo das razões entre seus lados, eles serão nomeados como está indicado.

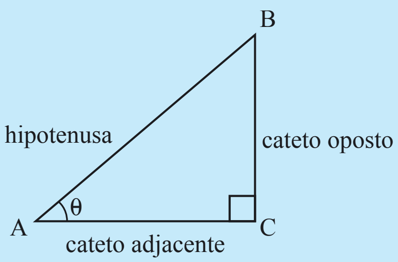


Figura 3- Lados do triângulo retângulo relativos ao ângulo θ

Para este ângulo θ, destacamos três razões entre comprimentos de catetos e a hipotenusa, chamadas *razões trigonométricas*, que passamos a definir e a utilizar.

4. DEFINIÇÃO

As *razões trigonométricas seno*, *cosseno* e *tangente* são expressas respectivamente por:

$$sen\theta = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}{hipotenusa}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad \theta}{cateto \quad adjacente \quad a \quad \theta}$$

5. EXEMPLO: UTILIZANDO A DEFINIÇÃO 4 PARA DETERMINAR MEDIDAS NO TRIÂNGULO

No triângulo representado na Figura 4, determine a medida de seu lado *a*.

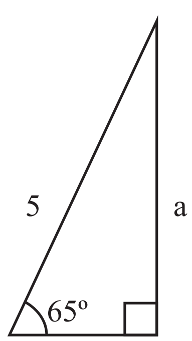


Figura 4 - Qual a medida de a?

Da Definição 4,

$$sen\theta = \frac{cateto \quad oposto}{hipotenusa}.$$

Então, $sen65^{\circ} = \frac{a}{5}$ e $a = 5sen65^{\circ}$. Se você usar uma tabela ou uma calculadora, encontrará o valor 0,9 para $sen65^{\circ}$ e poderá escrever:

$$a = 5 \times 0,9 = 4,5.$$

6. EXEMPLO: USO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS PARA DETERMINAR DISTÂNCIAS

(a) Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 7 *km*, e passa sobre um edifício de 4 metros de altura. Após alguns minutos, uma pessoa no terraço do edifício observa o avião sob um ângulo de elevação de visão de 45º. A que distância a pessoa está do avião?

Veja a representação do problema na Figura 5. Vamos desconsiderar, neste problema, a altura da pessoa.[7]

[7] Você acha razoável desconsiderarmos a altura da pessoa? Como você se posiciona a respeito desta proposta?

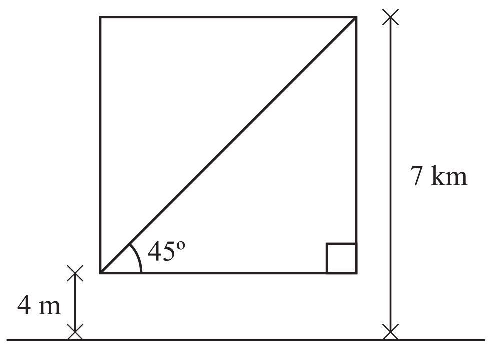


Figura 5 - A distância entre um avião e um observador

Explorando a representação feita, podemos determinar a distância *d* (em km) que a pessoa se encontra do avião escrevendo:

$$sen45 = \frac{7 - 0,004}{d},$$

uma vez que *d* corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo desenhado.

Agora é a sua vez: encontre o valor de *d*, resolvendo a equação acima, com o auxílio de uma tabela ou uma calculadora.

(b) Uma escada de 3 metros de comprimento está apoiada em uma parede vertical, fazendo com esta um ângulo de 30º. A que distância *h* o topo da escada se encontra do solo?

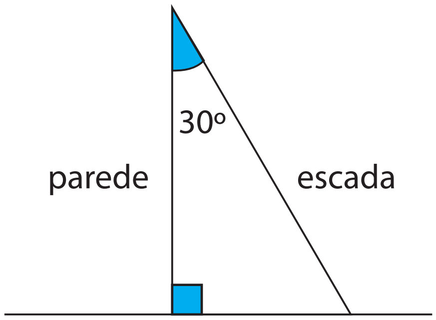


Figura 6 - A distância do topo da escada ao solo

Explorando a figura que representa a situação, vemos que é possível determinarmos a altura h em que a escada se encontra do solo, porque $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\cos 30^\circ = \dfrac{h}{3}$.

Ou seja, $h = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} m$.

7. EXEMPLO: A ALTURA DO PÃO DE AÇÚCAR

Observe o desenho na Figura 7.

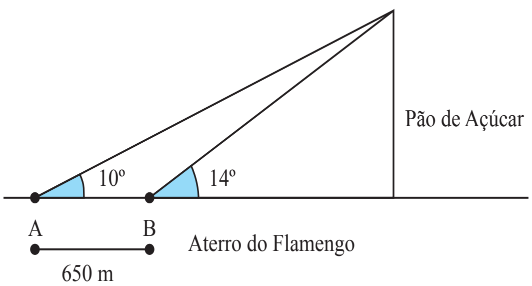


Figura 7- A altura do Pão de Açúcar

A linha vertical representa o Pão de Açúcar e a linha horizontal, o plano do Aterro do Flamengo. Os ângulos assinalados são os ângulos de visão de um observador posicionado num ponto A do Aterro e depois no ponto B, a 650 m do ponto A.

Chamamos a altura do Pão de Açúcar de h, e a distância do ponto B até o eixo central C do Pão de Açúcar de d. Assim podemos escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{h}{d+650} = \tan 10 \\ \dfrac{h}{d} = \tan 14 \end{cases}$$

Consultando uma tabela, ou utilizando uma calculadora, podemos resolver, em h, o sistema escrevendo:

$$\begin{cases} \dfrac{h}{d+650} & = & 0{,}17 \\ \dfrac{h}{d} & = & 0{,}24 \end{cases}$$

e

$$0{,}17d + 0{,}17 \times 650 = 0{,}24d \, .$$

Daí

$(0{,}24 - 0{,}17)d = 0{,}17 \times 650.$ Agora, é só usar uma calculadora.

Uma ideia semelhante à deste exemplo pode ser utilizada como estratégia para estimar a altura da Pedra do Bode.[8]

[8] Você sabe onde fica a Pedra do Bode? Se ainda não sabe, faça uma pesquisa na internet!

8. EXEMPLO: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS SEMELHANTES

Na Figura 8, buscamos representar uma sequência de triângulos retângulos semelhantes.

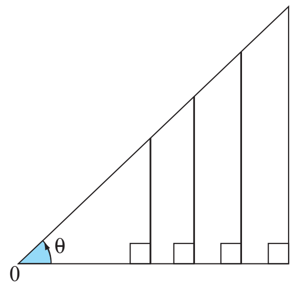


Figura 8 - Razões Trigonométricas como funções de θ

Pela definição de semelhança, os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais. Por isso, as *razões trigonométricas* são todas idênticas para todos os triângulos.

Em outras palavras, *razões trigonométricas* são independentes das dimensões dos lados dos triângulos retângulos semelhantes representados, embora seus valores se modifiquem quando a medida de θ varia.

Podemos construir tabelas de valores numéricos relacionando medidas possíveis para o ângulo θ e o valor de cada uma das *razões trigonométricas* correspondentes, como fez Hiparcus. Tais tabelas correspondem a uma, dentre as várias, representações para o seno, o cosseno e a tangente como funções do ângulo θ.

A interpretação das razões trigonométricas como funções é tema da Aula 8. Introduzimos esta discussão logo em sua primeira seção.

APÊNDICE 3 - FUNÇÕES PERIÓDICAS

Você já observou o histórico de sua conta de luz?

Se você estudar atentamente gráficos que representem seu consumo mensal, provavelmente irá identificar um padrão de consumo, em função dos meses do ano: numa residência sem ar-condicionado, o maior gasto costuma ser nos meses de inverno e o menor, nos meses de verão. É claro que alterações neste padrão de oscilações podem acontecer, em função de férias, festas, ou visitas, que são outras variáveis que interferem e são possíveis, além da temperatura ambiente e claridade naturais das estações do ano.

Reflita sobre uma outra situação: o fluxo de carros na via principal de sua cidade. Se você fosse representar em um gráfico o número de carros em função da hora do dia, seu desenho certamente se assemelharia a uma onda – em dias normais, horários de "pico" seriam determinados por entrada e saída da escola e ida e volta do trabalho, com diminuição de fluxo, nos demais horários. Diariamente, a oscilação se reproduziria, em ciclos semelhantes.

Funções que modelam processos em que seus valores se repetem em intervalos regulares, como os que descrevemos, são chamadas *funções periódicas*. Chamamos de *período* de tais funções ao menor intervalo de valores de x, em que a função executa um ciclo completo.

Em Matemática, uma função é identificada como *periódica* em *IR* quando ela repete um mesmo padrão ou ciclo, para sempre: conhecendo o ciclo de seu gráfico, somos capazes de desenhar o gráfico todo. São definidas como a seguir.

1. DEFINIÇÃO: FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função $y = f(x)$ com domínio *IR* é *periódica* com período d

se

$f(x+d) = f(x)$, para todo x em *IR*.

Além do *período*, uma outra medida ainda é importante quanto tratamos de funções que representam oscilações: a medida da variação entre dois "picos" de variação. Esta medida é chamada de *amplitude* e define-se como a seguir.

2 DEFINIÇÃO: AMPLITUDE DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA

A *amplitude* de uma função periódica $y = f(x)$ é a metade da diferença entre o seu maior valor da oscilação e o seu menor valor.

Dentre as funções periódicas, estão as *funções trigonométricas*, discutidas na Aula 8. Os gráficos a seguir são exemplos de gráficos de outras *funções periódicas*.

3. EXEMPLOS: GRÁFICOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

3.1 A função $y = 5senx$

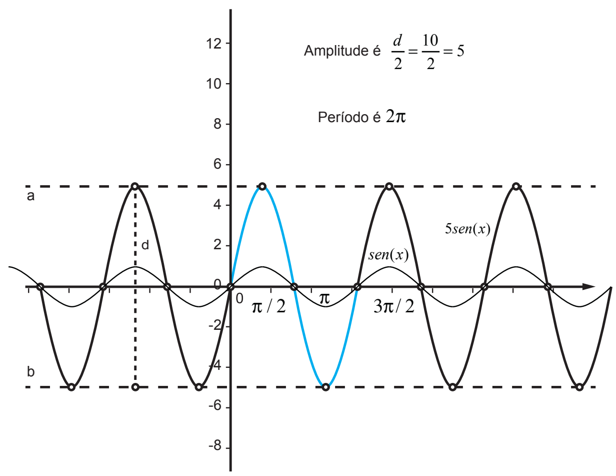


Figura 1: Gráfico de $y = 5senx$ e de $y = senx$

A função $y = 5senx$ é uma função periódica, também de período 2π. Seu gráfico está desenhado em um mesmo sistema de coordenadas de $y = senx$, para podermos compará-los. Veja que sua amplitude – metade da diferença entre o maior e o menor valor da oscilação – é 5.

3.2 A função *dente de serra*

O gráfico a seguir é de uma função periódica de período $\frac{\pi}{2}$. Compare seu gráfico com o da função $y = senx$, desenhado no mesmo sistema de coordenadas. Confirme que seus valores se repetem, em intervalos de comprimento $\frac{\pi}{2}$. O menor valor da função é 0 e o seu maior valor é 5. Da Definição 2, sua amplitude vale 2,5.

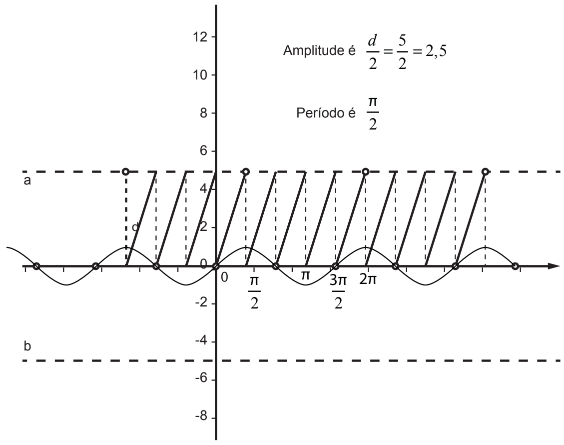


Figura 2 - Gráfico da função dente de serra e de $y = senx$

3.3 A função *onda quadrada*

No gráfico a seguir, um exemplo de função periódica de período 4π e amplitude 5.

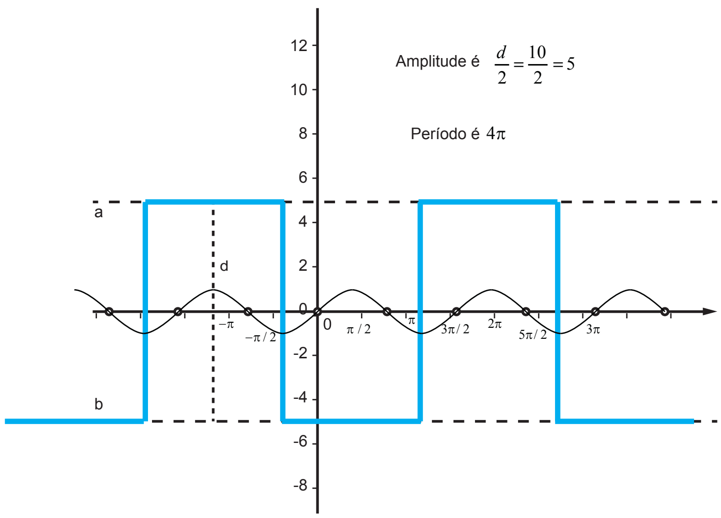


Figura 3 - Gráfico da função onda quadrada e de $y = senx$

APÊNDICE 4 - IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Quaisquer relações entre as funções trigonométricas, válidas para todos os valores de *x*, são chamadas identidades trigonométricas.

Algumas delas decorrem imediatamente da definição das funções trigonométricas.

1. EXEMPLO: IDENTIDADES IMEDIATAS A PARTIR DA DEFINIÇÃO 4 DO APÊNDICE 2

$$\tan x = \frac{cateto \quad oposto \quad a \quad x}{cateto \quad adjacente \quad a \quad x} = \frac{senx}{\cos x};$$

$$\cot x = \frac{cateto \quad adjacente \quad a \quad x}{cateto \quad oposto \quad a \quad x} = \frac{\cos x}{senx} = \frac{1}{\tan x};$$

$$\csc x = \frac{1}{cateto \quad oposto \quad a \quad x} = \frac{1}{senx};$$

$$\sec x = \frac{1}{cateto \quad adjacente \quad a \quad x} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ e } sen(-x) = -sen(x).$$

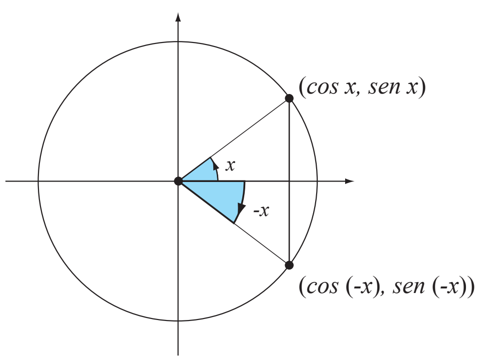


Figura 1 - Seno e cosseno de arcos simétricos

Para se convencer das duas últimas identidades, explore a Figura 1.

Retomando os conceitos de função *par* e de função *ímpar*, estudadas em nossa Aula 3, observe que:

-a função cosseno é uma função par, porque $\cos(-x) = \cos(x)$;

-a função seno é uma função ímpar, porque $sen(-x) = -sen(x)$.

Uma outra identidade, bastante útil, decorre diretamente do Teorema de Pitágoras.

2. EXEMPLO: IDENTIDADE DECORRENTE DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Verifique nas figuras 9 e 10, da Aula 8, que $u^2 + v^2 = 1$. Segue daí que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

Novas identidades podem ser escritas a partir das anteriores, que já estabelecemos.

3. EXEMPLO: ESTABELECENDO NOVAS IDENTIDADES

Dividindo ambos os membros da identidade $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$, para valores adequados de x, isto é, tais que $\cos^2(x) \neq 0$, chegamos a:

$$\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$, ou seja,

$$\frac{sen^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$, e ainda

$$\left(\frac{senx}{\cos x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2.$$

Retome as identidades no exemplo 1 e verifique que a última expressão neste exemplo se escreve como $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

4. EXERCÍCIO

Divida ambos os membros de $sen^2 + \cos^2 x = 1$ por $sen^2 x$. Que identidade você obtém?

5. EXEMPLO: UTILIZANDO IDENTIDADES PARA DETERMINAR VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seja x um ângulo no primeiro quadrante em que $senx = \frac{1}{2}$. Podemos obter todos os outros valores das funções trigonométricas como se segue:

- do exemplo 2, sabemos que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1$, ou seja,

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Uma vez que x está no primeiro quadrante, o valor do cosseno é positivo e assim

$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- do exemplo 1, escrevemos

$$\tan x = \frac{senx}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Os demais valores são obtidos do mesmo modo.

6. EXEMPLO: FÓRMULAS DE ADIÇÃO DE ARCOS

As fórmulas de Adição de Arcos é o nome dado às identidades

$sen(x + y) = senx\cos y + \cos xseny$;

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - senxseny$.

A demonstração destas identidades pode ser encontrada em diversos livros de Cálculo.

7. EXEMPLO: ESTABELECENDO NOVAS IDENTIDADES

A partir da Fórmula de Adição de Arcos podemos estabelecer novas identidades.

Por exemplo, fazendo $y = x$ na identidade
$sen(x + y) = senx\cos y + \cos xseny$, obtemos:

$sen(x + x) = senx\cos x + \cos xsenx$,ouseja, $sen(2x) = 2senx\cos x$.
Esta última é uma das fórmulas denominada Fórmula dos Arcos Duplos.

Agora, substitua $-y$ na identidade $sen(x + y) = senx\cos y + \cos xseny$.

Escreveremos $sen(x - y) = senx\cos(-y) + \cos xsen(-y)$.

Do exemplo 1, temos $\cos(-y) = \cos y$ e $sen(-y) = -seny$.

Segue que $sen(x - y) = senx\cos y - \cos xseny$.

8. EXEMPLO: RESOLVENDO EQUAÇÕES

Resolva $senx = sen2x$ em $[0, 2\pi]$.

Da identidade em 7, escrevemos:

$senx = 2senx\cos x$, ou seja, $senx(1 - 2\cos x) = 0$.

Esta última forma de escrever a equação que estamos resolvendo nos leva às possibilidades:

1ª) $senx = 0$, que será resolvida no exemplo a seguir, ou

2ª) $(1 - 2\cos x) = 0$, que corresponde aos valores de x tais que $\cos x = \frac{1}{2}$.

Para a primeira, temos os valores 0, π e 2π.

Para a segunda, veja no Círculo Trigonométrico que esta corresponde a $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

A solução será dada por 0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ e 2π.

9. EXEMPLO: OS ZEROS DA FUNÇÃO $y = senx$

Para que valores de x temos $senx = 0$?

Resolvendo a equação para x entre 0 e 2π, vemos que os zeros ocorrerão em $x = 0$ e $x = \pi$.[9]

Podemos então escrever que os zeros ocorrerão em $x = 0 + 2k\pi$ e $x = \pi + 2k\pi$, para todo valor inteiro de k.

Explorando as expressões obtidas, verificamos que:

$x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

e colocando o número π em evidência em $x = \pi + 2k\pi$, podemos escrever:

$x = \pi + 2k\pi = (1 + 2k)\pi$.

Para todo valor inteiro de k, o número $2k$ é sempre um número inteiro par e o número $2k + 1$ é sempre um número inteiro ímpar.

Desse modo, a expressão $x = 2k\pi$ corresponde a todos os múltiplos pares de π e a expressão $x = (1 + 2k)\pi$ corresponde a todos os múltiplos ímpares de π.

Ou seja, as duas expressões

$x = 2k\pi$ e

$x = (1 + 2k)\pi$

correspondem a todos os múltiplos, pares e ímpares de π. Podem ser substituídas por uma única expressão:

$x = k\pi$, para todo número inteiro k. Esta última corresponde à solução da equação $senx = 0$, para x em R.

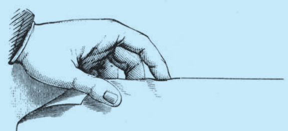
10. EXERCÍCIO

Quais são todos os zeros da função $y = \cos x$?

[9] Consulte a Definição 4.4 e as figuras 9 e 10, da Aula 8.

SOBRE A AUTORA

Márcia Maria Fusaro Pinto é doutora em Educação Matemática pela Universidade de Warwick, Inglaterra. É professora do Instituto de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro e membro do corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação, na Universidade Federal de Minas Gerais. Sua experiência profissional inclui o ensino para diversos cursos vocacionais, atuando também na formação inicial e continuada de professores, presencial e a distância. Seu interesse em pesquisa é o ensino e aprendizagem da Matemática nos níveis secundário e superior, com foco no uso de tecnologias e nas interações em sala de aula presenciais e a distância, adotando perspectivas teóricas socio-culturais. É autora de *Cálculo I* (Editora UFMG, 2008); coautora de *Introdução ao cálculo diferencial* (Editora UFMG, 2009); e autora de *Introdução ao cálculo integral* (Editora UFMG, 2010).



A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optima Std, e impressa pela Imprensa Universitária da UFMG, em sistema offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em 2011.